ジャックナイフ型モーメント推定について

前園宜彦　九州大学大学院数理学研究院

1. 序

U-統計量のように統計量の形が具体的に与えられるものに対する高次モーメントのジャックナイフ型推定量の一致性について考察する．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を母集団分布 $F_\theta(x)$ からの無作為標本とする．ここで議論するのは，母数 θ に関連した漸近 U-統計量

$$\begin{aligned} S_n &= \theta + n^{-1}\delta + n^{-1}\sum_{i=1}^n g_1(X_i) + n^{-2}\sum_{1\le i<j\le n} g_2(X_i, X_j) \\ &\quad + n^{-3}\sum_{1\le i<j<k\le n} g_3(X_i, X_j, X_k) + \cdots \end{aligned}$$

である．ここで $\xi^2 = E[g_1^2(X_1)]$ とおくと，これは漸近分散の主要項である．このときエッジワース展開は次で与えられる．

$$P\Big\{\frac{\sqrt{n}(S_n-\theta)}{\xi} \le x\Big\} = \Phi(x) - \phi(x)\Big[\frac{\delta}{\xi} + \frac{\kappa_3(x^2-1)}{6\xi^3}\Big] + o(n^{-1/2}).$$

ただし $\Phi(x), \phi(x)$ は標準正規分布の分布関数及び確率密度関数で

$$\kappa_3 = E[g_1^3(X_1)] + 3E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)] = e_1 + 3e_2$$

である．漸近分散の主要項 ξ^2 のジャックナイフ推定量は

$$\hat{\xi}^2 = (n-1)\sum_{i=1}^n (S_n^{(i)} - S_n)^2$$

で与えられる．ここで $S_n^{(i)}$ は n 個の標本から X_i を除いた S_n に対応する統計量である．ここではエッジワース展開に現れる高次のモーメント及びバイアス δ に対するジャックナイフ型の推定量について考察する．

2. ジャックナイフ型推定量

Quenouille(1949, JRSS) 及び Tukey(1958, AMS) によって議論されているバイアス δ の推定量は

$$\hat{\delta} = (n-1)\sum_{i=1}^n (S_n^{(i)} - S_n)$$

になる．e_1, e_2 の推定のために，$g_1(X_i)$ 及び $g_1(X_i, X_j)$ の擬似量

$$\begin{aligned} &\hat{g}_1(X_i) = (n-1)(S_n - S_n^{(i)}), \\ &\hat{g}_2(X_i, X_j) = (n-2)\Big\{nS_n - (n-1)(S_n^{(i)} + S_n^{(j)}) + (n-2)S_n^{(i,j)}\Big\} \end{aligned}$$

を考える．ここで $S_n^{(i,j)}$ は X_i, X_j を除いた $n-2$ 個の標本に基づく S_n に対応する統計量である．$\hat{g}_2(X_i, X_j)$ については，Hinkley & Wei(1984, BK) によりジャックナイフ分散推定量のバイアス

修正の議論において研究されている．これらの擬似量を使うと e_1, e_2 の一致推定量が次で与えられる．

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{g}_1^3(X_i),$$
$$\hat{e}_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\le i<j\le n} \hat{g}_1(X_i)\hat{g}_1(X_j)\hat{g}_2(X_i, X_j).$$

定理 1 $E\{|g_1(X_1)|^4 + |g_2(X_1, X_2)|^4 + |g_3(X_1, X_2, X_3)|^4\} < \infty$ と仮定する．このとき $\hat{\delta}, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ は，それぞれ δ, e_1, e_2 の一致推定量である．

3. 4次のモーメント推定

漸近 U-統計量の4次のモーメントには次の量が現れる，

$$\begin{aligned}
\xi_2^2 &= E[g_2^2(X_1, X_2)], \\
e_3 &= E[g_1^4(X_1)], \\
e_4 &= E[g_1^2(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)], \\
e_5 &= E[g_1(X_2)g_1(X_3)g_2(X_1, X_2)g_2(X_1, X_3)], \\
e_6 &= E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_1(X_3)g_3(X_1, X_2, X_3)]
\end{aligned}$$

これらの量のジャックナイフ型推定量を考察する．まず ξ_2^2, e_3, e_4, e_5 の推定量は先に定義した擬似量を用いて

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_2 &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\le i<j\le n} \hat{g}_2^2(X_i, X_j), \\
\hat{e}_3 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{g}_1^4(X_i), \\
\hat{e}_4 &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\le i<j\le n} \{\hat{g}_1^2(X_i)\hat{g}_1(X_j) + \hat{g}_1^2(X_j)\hat{g}_1(X_i)\}\hat{g}_2(X_i, X_j), \\
\hat{e}_5 &= \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{C_{n,3}} \Big\{\hat{g}_1(X_j)\hat{g}_1(X_k)\hat{g}_2(X_i, X_j)\hat{g}_2(X_i, X_k) \\
&\quad +\hat{g}_1(X_i)\hat{g}_1(X_k)\hat{g}_2(X_i, X_j)\hat{g}_2(X_j, X_k) + \hat{g}_1(X_j)\hat{g}_1(X_j)\hat{g}_2(X_i, X_k)\hat{g}_2(X_j, X_k)\Big\}
\end{aligned}$$

と構成できる．e_6 の推定のためには g_3 の擬似量

$$\begin{aligned}
\hat{g}_3(X_i, X_j, X_k) &= (n-4)(n-5)\Big\{nS_n - (n-1)(S_n^{(i)} + S_n^{(j)} + S_n^{(k)}) \\
&\quad +(n-2)(S_n^{(i,j)} + S_n^{(j,k)} + S_n^{(i,k)}) - (n-3)S_n^{(i,j,k)}\Big\}
\end{aligned}$$

が必要になる．ここで $S_n^{(i,j,k)}$ は X_i, X_j, X_k を除いた $n-3$ 個の標本に基づく S_n に対応する統計量である．この擬似量を使うと

$$\hat{e}_6 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{C_{n,3}} \hat{g}_1(X_i)\hat{g}_1(X_j)\hat{g}_1(X_k)\hat{g}_3(X_i, X_j, X_j)$$

が e_6 の一致推定量になる．

定理 2 $E\{|g_1(X_1)|^5 + |g_2(X_1, X_2)|^5 + |g_3(X_1, X_2, X_3)|^5\} < \infty$ と仮定する．このとき $\hat{\xi}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5, \hat{e}_6$ は，それぞれ $\xi_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ の一致推定量である．