＜要旨＞ 計算機による絶対正則なテンソルの探索と同値性判定

前原 一満（九州大学芸術工学府）

1　はじめに

ここでは、多次元配列データにあたるものを「テンソル」と呼ぶ。テンソルの分解は、行列の分解と同様に広く応用が期待されるものである。現在では、主に PARAFAC/CANDECOMP といった分解手法があり、生体信号の解析などの分野に応用されている。しかし、テンソルは行列のように分解の基準（ランク）や、低ランク近似問題について未解決の部分が多く、理論的に未整備な状態にあるといえる。

そこで本研究では、テンソルのランク決定問題の基礎付けのために、「絶対正則なテンソル」の性質を調べることに主眼を置いた。

2　テンソルのランクと絶対正則性

$I \times J \times K$ 型テンソル $\mathcal{T}$ の場合、rank-1 テンソルをそれぞれ I, J, K 次元ベクトルの積 (outer product) により $\boldsymbol{a}_r \otimes \boldsymbol{b}_r \otimes \boldsymbol{c}_r$ と定義する。

$$\mathcal{T} = \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{a}_r \otimes \boldsymbol{b}_r \otimes \boldsymbol{c}_r \tag{1}$$

とあらわせるとき、最小の R をテンソル $\mathcal{T}$ のランクと呼ぶ。

角らは、絶対正則でない $n \times n \times 3$ テンソル $\mathcal{T}$ に対し、$\mathrm{rank}(\mathcal{T}) \leq 2n - 1$ であることを証明した。テンソルが持ちうる最大ランクについて一般的な証明を与えるには、絶対正則なテンソルがどういった性質を持つかについて、詳しく調べる必要がある。

2.1　絶対正則の定義

A, B, C を $n \times n$ 正方行列として、$n \times n \times 3$ テンソル $\mathcal{T} = [A, B, C]$ とあらわす。絶対正則とは、$\mathcal{T}$ の決定多項式 $F_{\mathcal{T}}(x, y, z)$ が以下の条件を満たすこと。

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{T}}(x, y, z) = \det(xA + yB + zC) \neq 0 \tag{2}$$

ただし、$x = y = z = 0$ をのぞく。

3　絶対正則なテンソルの探索

以下の Polya の定理を使い、整数成分をもつ $n \times n \times 3$ テンソルの中から、厳密に絶対正則であるテンソルの具体例をランダムに探索した。

3.1　Polya の定理

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を同次多項式とする。

$$\Delta_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \tag{3}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4}$$

f が単体 Δ_n 上で常に正ならば、p が十分に大きいとき、多項式 g の係数はすべて正。

3.2 計算機による絶対正則性の判定

数式処理ソフトを使い、具体的に $\mathcal{T} = [A, B, C]$ を与えたとき決定多項式 $F_{\mathcal{T}}$ の各変数の符号の組み合わせに対して、$(x+y+z)^p$ をかけた多項式の係数がすべて正である（$\Rightarrow$ 絶対正則）かどうかをチェックした。

3.3 絶対正則なテンソルの例

以上の方法による探索の結果、$4 \times 4 \times 3$ については 1000 例以上の異なる絶対正則なテンソルの例のリストを得た。また、$12 \times 12 \times 3, 16 \times 16 \times 3$ についても同様の方法で、いくつかの具体例を見つけることができた。

4 テンソルの同値性

以下のような同値性によって、絶対正則なテンソルの集合の分類を試みた。

2 つのテンソル $\mathcal{T}_X = [X_1, X_2, X_3], \mathcal{T}_Y = [Y_1, Y_2, Y_3]$ について、以下の式 (5), (6), (7) を満たす正則な行列 $P, Q, R = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ が存在するとき、$P-Q-R$ 同値と呼ぶ。

$$Y_1 = P(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3)Q \tag{5}$$
$$Y_2 = P(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3)Q \tag{6}$$
$$Y_3 = P(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3)Q \tag{7}$$

このような P, Q, R による変換は、テンソルのランクや絶対正則性を変えない変換であるため、簡単な形の同値なテンソルに帰着させてその性質を考察することも可能になる。

R が既知の場合は、単に $F_{\mathcal{T}_X}/F_{\mathcal{T}_Y}$ が定数であることを確かめればよい。P または Q が既知の場合は、連立方程式を解くことで同値性を判定する方法を示した。

4.1 絶対正則な $2 \times 2 \times 2$ テンソルの同値性

任意の絶対正則な $2 \times 2 \times 2$ テンソルにおいて、絶対正則なものはすべて互いに相似変換できることを示した。したがって、すべての絶対正則な $2 \times 2 \times 2$ テンソルは $P-Q-R$ 同値であることがいえた。

4.2 一部の $4 \times 4 \times 4$ 絶対正則テンソルの同値性

四元数を一般化した quaternion algebra に同型なテンソルについて、具体的な P, Q, R の例を挙げることで、パラメータ a, b が異なっていてもすべてのこのタイプのテンソルは $P-Q-R$ 同値であることが証明できた。

5 まとめ

計算機を使い、斉次多項式の正定値性を Polya の定理によって判定することで、絶対正則なテンソルの例を多く見つけることができた。

またテンソルの同値性判定問題については、$Q-R/P-R$ 同値性判定については具体的な計算方法を得ることができたが、P を含めた $P-Q-R$ 同値性判定についてはいまだ具体的な計算方法を得られていない。

理論的な考察により、一部の同値なテンソルの集合を見つけることはできたが、具体的にあるテンソルが与えられたとき、それがどの同値類に属するかを判定する方法はやはり必要である。これは今後の課題である。