要旨: MODERATE DEVIATION FROM A UNIT ROOT IN MA(1)

矢部竜太
一橋大学大学院経済学研究科　博士課程一年

当日の報告では、単位根からの Moderate deviation のある 一階の Moving Average model (MA(1)) の漸近特性について述べた。

単位根からの Moderate deviation のある MA(1) モデルは次のように定義される。

$$y_t = \epsilon_t - \rho_t \epsilon_{t-1}$$

ただし、$\rho_T = 1 - c/T^\alpha$, $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\epsilon_t \sim \mathrm{i.i.d}(0, \sigma^2)$ とする。Tanaka(1990) で単位根検定のために提案されたスコア統計量 S_T は以下のように定義される。

$$S_T = \frac{y'\Omega^{-2}y}{y'\Omega^{-1}y}$$

ただし、$y = (y_1, \ldots, y_T)'$, Ω は y の $\rho_T = 1$ のもとでの分散共分散行列である。

本研究では Moderate deviation のある MA(1) 過程のもとでのスコア統計量の漸近分布を求めることで Moderate deviation のある確率過程の漸近特性を調べた。

定理 S_T の漸近分布は係数の収束のオーダーパラメータ α に依存し 3 つのタイプ ((i)$1/2 < \alpha < 1$, (ii)$\alpha = 1/2$, (iii)$0 < \alpha < 1/2$) に分類でき、(iii) のケースでは反転可能な MA(1) のもとでの漸近分布に一致する。また、各々の漸近分布は以下のように与えられる。

(i)$1/2 < \alpha < 1$

$$\frac{S_T}{T^{3-2\alpha}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{n^4\pi^4} Z_n^2$$

(ii)$\alpha = 1/2$

$$\frac{S_T}{T^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{c^2}{n^4\pi^4} Z_n^2}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{n^2\pi^2} Z_n^2}$$

(iii)

$$\frac{S_T}{T^{2-2\alpha}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{c^2}{n^4\pi^4} Z_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^2}{n^2\pi^2} Z_n^2}$$

系(ii)$\alpha = 1/2$ で得られてスコア統計量の漸近分布に対して $c \to \infty$ とすると、この操作によって得られる漸近分布は (iii)$0 < \alpha < 1/2$ のケースと一致する。

定理の結果より、(iii) のケースは local-to-unity の確率過程であるにもかかわらず、漸近特性は反転可能過程に近いものを持っていると考えられる。また、収束のオーダーは単位根のある場合から反転可能の場合まで、連続的に変化している。系より (ii)$\alpha = 1/2$ の場合は単位根過程と反転可能過程の中間的な漸近特性を持っていることがわかる。

当日の報告では、さらに誤差項 ϵ_t を $I(0)$ な線形過程へと拡張した場合のスコア統計量の漸近分布の結果についても報告した。

漸近分布を反転公式により求める際に、特性関数が数値計算上、不連続となるため数値積分のパッケージプログラムを直接利用することはできない。Nabeya and Tanaka(1990) や Tanaka(1996) で提案された、特性関数の補正方法や補正された特性関数の積分方法についても報告した。