

「 α -quantiles と Time-Map を用いた確率過程（ブラウン運動）のデータ分析の試み」

2010 年 11 月 25 日から 27 日 研究集会 高知にて。

発表者 三浦良造（一橋大学大学院国際企業戦略研究科特任教授（名誉教授））

（一橋大学大学院国際企業戦略研究科 横内大介氏と共同の研究）

研究発表報告。

11 月 25 日午後に上記の題目で研究発表を行いました。

：（１）関心と問題。

発表した研究で扱った問題は、大きく言えば、従来の統計学で“観測が独立で同一分布に従う場合”と仮定されているところを“観測が独立で同一分布に従う確率変数の累積和である場合”に置き換えて統計モデルを作ると、どのような「確率と統計の体系」ができるか、という関心からきています。このような仮定の下で、従来と同様に定義されるノンパラメトリック統計量がどのような確率分布に従うのか、その統計量を用いて分析するとどういった利点があるのか、について、幾つかの研究成果を紹介しました。

：（２）ノンパラメトリック統計量。

一標本、二標本などの基本的な統計的問題では、観測が独立で同一分布に従う場合というのが、通常の数理統計学が扱う統計的仮定です。時系列分析においては、時系列的依存性をモデル化して、残る偶然変動を独立で同一分布に従うと仮定します。そこで用いられる基本的なノンパラメトリック統計量は、経験分布関数、順序統計量、順位統計量です。

これまでの研究成果としては、連続時間のブラウン運動上に上記のノンパラメトリックな統計量に対応する“量”が定義されその確率分布が求められています（参考文献「1」を参照）。それらは、すべて連続時間の確率過程（ブラウン運動、あるいは幾何ブラウン運動）上で考えています。つまり確率過程を“パラメトリック”に扱っています。これらの量は、数理ファイナンス分野で行われているエキゾチック・デリバティブズ（派生証券）をデザインするために使われてきました。これらの量は、連続時間の確率過程の軌跡の統計量（関数あるいは汎関数）として見ることもできます。そこで、これを離散時間の確率過程の軌跡の関数として見ることにより、観測が独立で同一分布に従う確率変数（あるいは、必ずしも独立でなくてもよいとして）の累積和の統計量として考えることを試みます。このような試みは、ノンパラメトリック統計量に関しては、1960 年の Wendel 論文が最初ではないかと思われます。

：（３）データ分析

今回の試みでは、観測が独立で同一分布に従う確率変数の累積和である場合に対応する統計的データ分析の可能性を見ることにしました。現実のデータでは、累積和を構成する個々の観測が必ずしも独立というわけではありませんが、そのような場合は、今回の試み

を一般の確率過程の軌跡を分析するための方法とみてもよいかと考えます。

今回の発表では、確率過程の軌跡を実現した値とその値が実現した時刻の（値と時刻）二つに分けることにより、軌跡が持つ情報を分解するという考え方を紹介しました。時刻を見るという点がここでは新味です。上記の連続時間確率過程上のノンパラメトリック統計量がすべて **occupation time** が基礎になっているためであり、しかし、これまではその **occupation time** の“時間の長さ”だけしか使っていないので、ここでは“時間の位置”をも情報として使う、それにより **occupation time** が持つ情報を使い尽くすという発想です。そのため、**Time-map** という（特に新しいわけではなく既視のものに言葉を与えただけですが）概念と用語を導入します。（値、時刻）のうち、時刻はこれで扱うとして、値は、実現値のレベルを示しますから、順序統計量に当たるクオンタイルを使います。順位もクオンタイルと共に使います。確率過程の実現値の個数をカウントするのが経験分布関数であるというわけです。

データ分析事例としては、ヘッジファンドリターンデータを使い、幾つかのグラフを示しました。かなり大きな規模のデータベースを使いましたので、迅速に多くの計算を行ない、結果を図示する視覚化手法により分析結果を見ました。ヘッジファンドリターンデータは自己回帰的な性質を時機に応じて強く、あるいは弱く持ちます。この様子はすでに論文として発表しました(参考文献「2」参照)。 α -quantiles からの **Time-Map** と **Ranks** からのそれとは同一であること、**Ranks** は軌跡の位置、と尺度の変換のもとで不変であることなどの性質が良く反映する局面では、これらの”ノンパラメトリック”統計量が有効ではないかという見立てを報告しました。特に二標本の比較のところでは、二つの標本の挙動の様子が見て、ヘッジファンド分類に有効ではないかという見立てです。

今回発表した私の試みは、すでに時系列モデル解析、あるいは品質管理の CUSUM によるデータ分析の分野ですでに得られていること以上の成果を上げることができるかどうかの問題です。今回の研究集会では、私の研究関心と同じ方向にある、品質管理において用いられる CUSUM(独立で同一分布に従う確率変数の和)についての研究発表からも示唆を得ることができ大変有意義であったと考えます。

参考文献。

統計量の確率分布と数理ファイナンスへの応用の論文

:「1」 Miura, R. (2007). “Rank Processes, Stochastic Corridor and Applications to Finance.” *Advances in Statistical Modeling and Inference*. Edited by Vijay Nair. pp.529-542. World Scientific.

Hedge Fund Return に関する論文。

: [2] Miura R. , D. Yokouchi and Y. Aoki (2009). “A Note on Statistical Models for Individual Hedge Fund Returns.” *Math.Meth. Oper. Res.* 69. 553-577.