

科研費・基盤研究（A）「統計科学における数理的手法の理論と応用」
研究代表者：谷口正信（早稲田大学）

科研費シンポジウム

統計モデルによる現象の解析，並びに，その基礎理論
報告集

開催期間 10 月 21 日～23 日
会 場 山形テルサ

科研費シンポジウム
「統計モデルによる現象の解析, 並びに, その基礎理論」
報告集目次

1. 内部格付手法における回収率・期待損失の統計型モデル	… 1
三浦 翔(総合研究大学院大学・博士課程, 日本学術振興会・特別研究員DC2)	
山下智志(統計数理研究所, 金融庁金融研究研修センター・特別研究員)	
江口真透(統計数理研究所)	
2. 公的年金を構成する5資産の月次リターンデータの分析	… 11
横内大介(一橋大学大学院国際企業戦略研究科)	
3. ブラウン運動のクオントイルに基づく統計的データ分析の可能性	… 21
三浦良造(一橋大学大学院国際企業戦略研究科)	
4. On the approximation for the distribution of multinomial ϕ -divergence goodness-of-fit statistic under nonlocal alternatives	… 25
Pan ei Htwe(Kagoshima University)	
Nobuhiro Taneichi(Kagoshima University)	
Yuri Sekiya(Kushiro Campus, Hokkaido University of Education)	
5. 二項反応の一般線型モデルにおけるリンク関数について	… 29
種市信裕(鹿児島大学理工)	
関谷祐里(北海道教育大学・釧路校)	
Pan ei Htwe(鹿児島大学理工)	
6. 新たな臨床試験デザインへの取り組み - 無益性中止のアダプティブデザイン -	… 31
鈴木ゆら(塩野義製薬株式会社 解析センター)	
長谷川貴大(塩野義製薬株式会社 解析センター)	
吉田祐樹(塩野義製薬株式会社 解析センター)	
浦狩保則(塩野義製薬株式会社 解析センター)	

7. 遺伝統計学とゲノム応用の最前線	... 41
上辻茂男(株式会社スタージェン 遺伝統計解析事業部)	
8. Boosting for Maximization of the Partial Area under the ROC Curve	... 57
小森 理(統計数理研究所予測発見戦略研究センター)	
江口真透(統計数理研究所)	
9. ルート n -一致推定量を用いたラプラス近似の妥当性について	... 63
宮田庸一(高崎経済大学経済学部)	
10. Gerber-Shiu functions and the statistical inference	... 71
清水泰隆(大阪大学大学院基礎工学研究科)	

内部格付手法における回収率・期待損失の統計型モデル

三浦 翔*

山下 智志†

江口 真透‡

概要

2007 年 3 月から邦銀に対してバーゼル II (新 BIS 規制) の適用が始まった。基礎的内部格付手法 (FIRB, Foundation Internal Ratings-Based approach) から先進的内部格付手法 (AIRB, Advanced Internal Ratings-Based approach) への移行に際して推計値が必要とされる債権回収率 (RR, Recovery Rate)、またはデフォルト時損失率 (LGD, Loss Given Default) の推計精度の向上が求められている。しかし、債権回収のデータベースの構築が充実していないことや、債権回収途中のデータの取り扱いなどに対する一般的な手法が確立されておらず、いまだに回収率推計モデルの研究は進んでいない。

本研究においては、内部格付の低下 (要注意以上から要管理以下への格付変更) によりデフォルトを定義した場合の、不動産などの担保や保証協会による保証などを勘案した回収率推計モデルの構築を行った。モデルのパラメータ推計には銀行の格付および回収実績データを用いている。また、実際の回収が長期間にわたることや、正常格付への復帰の影響を考慮することによって、より実際の回収を反映したモデリングを提案する。

その結果、担保カバー率、保証カバー率が回収率の有力な要因であることがわかり、それらの関数として EL(Expected Loss) が推計可能であることを示すことによって、実データによる内部格付手法に応じた信用リスクの計量化を実現した。

キーワード：リスク管理、クレジットリスク、債権回収率

1 はじめに：バーゼル II における信用リスク

2007 年 3 月末より、日本国内において、自己資本比率の測定と基準に関する国際的統一化であるバーゼル II (新 BIS 規制) の適用が始まった。これに伴い、各行はリスク計測手法を規制の枠組みの中で選択が可能となった。バーゼル II における信用リスクの計測手法に関しては、Basel Committee on Banking Supervision (2004) に詳しい。信用リスクは、デフォルト確率 (PD, Probability of Default)、デフォルト時損失率 (LGD^{*1}, Loss Given Default)、デフォルト時エクスポージャー (EAD, Exposure At Default) の 3 つのパラメータによって定義されており、各銀行は当局によって定められた固定の値を用いる手法 (標準的手法) とそれぞれのパラメータを推計する手法 (内部格付手法) のいずれかを選択することが可能となった。内部格付手法は、各行でリスク・ウェイトを推計し、各パラメータの値を求める。内部格付手法においてはさらに 2 つの選択肢があり、基礎的内部格付手法 (FIRB, Foundation Internal Ratings-Based approach) においては、PD のみの推計を要求されるのに対し^{*2}、先進的内部格付手法 (AIRB, Advanced Internal Ratings-Based approach) においては、PD の推計にとどまらず、LGD と EAD の推計が要求される。本稿においては、AIRB への移行を目指して、LGD(回収率) 推計を目的とした手法を提案する。

以下、本稿においては、実際の債権の回収データを用いて回収率の推計モデルの構築を行う。第 2 節は格付推移行列と格付推移行列によるデフォルトの定義、及び吸収項について、第 3 節は回収率の定義と回収率の推計に用いる統計モデル、第 4 節は格付推移行列と回収率を用いた EL の計算方法について、第 5 節は使用したデータの概略、第 6 節は実データを用いた回収率の推計モデルの実証結果、第 7 節は結論、及びディスカッションを記す。

*総合研究大学院大学・博士課程、日本学術振興会・特別研究員 DC2 (E-mail:kmiura@ism.ac.jp)

†統計数理研究所 (E-mail:yamasita@ism.ac.jp)

‡統計数理研究所 (E-mail:eguchi@ism.ac.jp)

^{*1}一般的に、LGD と回収率 (RR, Recovery Rate) は、 $RR=1-LGD$ の関係にある。

^{*2}リテール債権に関しては、PD だけでなく LGD、EAD の推計も必要となる。

2 格付推移行列とデフォルトの定義

本研究においては、デフォルトを内部格付の格付推移によって定義する。具体的には、要管理以下の格付を付与された債務者をデフォルトとみなす。以下では、格付推移行列について説明し、次に吸収項の存在する格付推移行列を述べる。

2.1 格付推移行列

格付推移行列は、債務者の t 期における格付から $t+1$ 期への格付の推移を行列で表現したものである^{*3}。いま、格付が $\{1, 2, \dots, K\}$ の K 区分あるものとし、 t 期から $t+1$ 期において格付が k から l へ推移する確率を $p_{t,t+1}(k, l)$ としたとき、格付推移行列 $P_{t,t+1}$ を以下のように定義する。

$$P_{t,t+1} = \begin{pmatrix} p_{t,t+1}(1, 1) & p_{t,t+1}(1, 2) & \dots & p_{t,t+1}(1, K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{t,t+1}(K, 1) & p_{t,t+1}(K, 2) & \dots & p_{t,t+1}(K, K) \end{pmatrix} \quad (1)$$

このとき、 t 期において格付 $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ の債務者は、翌 $t+1$ 期には格付 $\{1, 2, \dots, K\}$ のいずれかの格付に推移するから、各行の和は 1 となる。すなわち、

$$\sum_{l=1}^K p_{t,t+1}(k, l) = 1 \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, K\})$$

が成立する。また、観測期間の終了時刻を $t = T$ とすると、観測初期から観測終了に至る格付の推移行列 $P_{1,T}$ は^{*4}、

$$\begin{aligned} P_{1,T} &= P_{1,2} P_{2,3} \dots P_{T-1,T} \\ &= \prod_{t=1}^{T-1} P_{t,t+1} \end{aligned}$$

となり、推移確率が斉時的である^{*5}と仮定すると、任意の期間において定常的な $P = P_{t,t+1}$ を満たす P が存在し、

$$P_{1,T} = \prod_{t=1}^{T-1} P_{t,t+1} = P^{T-1} \quad (2)$$

が成立する。以下、本稿においては、断りが無い場合を除き、推移確率は斉時的であるものとする^{*6}。

日本銀行金融機構局 (2005) によると、「バーゼル II におけるデフォルトの定義は、(i) リストラクチャリング等による債務不履行の見込み、(ii) 90 日以上延滞といったことが挙げられているが、これはわが国における「要管理先」以下の定義に近いものと考えられる。」としている。従って、本稿においても要管理以下をデフォルトと定義する。

第 1 節でみたような通常の PD 推計のモデルは、一度デフォルトした後に正常復帰する債務者の確率は考慮できない。しかし、実際には、第 5 節以降の実データを用いた格付推移行列から明らかなように、要管理以下をデフォルトと定義した場合、債務者が正常復帰^{*7}する件数は一定数存在している。債権価値を考えた際に、これらの正常復帰した債務者の存在を考慮することなく推計すると、バイアスを生じさせることになる。本稿

^{*3}本稿において、格付は、案件ごとではなく債務者ごとに付与されているものとして扱う。

^{*4}ここでは、マルコフ性を仮定している。格付推移行列におけるマルコフ性に関する詳細は、例えば、楠岡・青沼・中川 (2001) 等を参照のこと。

^{*5}任意の期間において格付は等確率で推移すること、すなわち、 $p_{t,t+1}(k, l) = p(k, l)$, $\forall t \in \{1, 2, \dots, T-1\}$ を満たす $p(i, j)$ が存在する

^{*6}青沼・市川 (2008) においては、格付推移行列の推計手法を論じている。

^{*7}ここでは要管理以下からそれより上位の区分に格付が推移すること。

においては、格付推移行列を用いることによって正常復帰する確率を求められるだけでなく、正常復帰を考慮した回収率推計を行うことができることを示す。

また、本稿においては、デフォルト基準とは別に「デフォルト後終了」という吸収項の格付区分を設ける。これにより、バーゼル II に準拠したデフォルト基準を考慮できるだけでなく、正常復帰確率を用いた EL の推計が可能となる^{*8}。

2.2 格付推移行列における吸収項

取引が終了した債務者は、吸収項によって表現する。本稿では、吸収を表現する格付区分 (一度その格付が付与された後は他の格付に推移しない格付区分) を以下のように設ける^{*9}。吸収項が存在するときの格付推移行列については、青沼・市川 (2008) と同様に格付の上方と下方に吸収項が存在する (上側吸収項は「通常終了」、下側吸収項は「デフォルト後終了」を表す格付区分とする) と仮定して説明を行う。ここで、「通常終了」とはデフォルトしていない状況から与信残高が 0 になるなどの理由から格付付与が終了した債務者と定義し、「デフォルト後終了」とは要管理以下のデフォルト格付区分から正常復帰することなく格付付与が終了した債務者と定義する。いま、格付の区分が $\{1, 2, \dots, K\}$ の K 区分存在するとし、格付区分 1 は「通常終了」、 K は「デフォルト後終了」で、かつそれぞれが吸収項であるとする。このとき、(1) の格付推移行列 P は、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p(2, 1) & p(2, 2) & p(2, 3) & \dots & p(2, K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(K-1, 1) & p(K-1, 2) & p(K-1, 3) & \dots & p(K-1, K) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。この格付推移行列 P においても、(1) の格付推移行列と同様に各行の和は 1 となる。

この格付推移行列 P における第 1 行、第 K 行は、

$$p(1, l) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots l = 1 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{otherwise} \end{cases}$$

$$p(K, l) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots l = K \\ 0 & \dots\dots\dots \text{otherwise} \end{cases}$$

であり、これは、格付 1 と格付 K の債務者は他の格付に推移しないことを意味している。

以下の第 5 節、第 6 節において実データを用いるが、簡単のため、格付を正常が 2 区分、要注意を 1 区分、要管理を 1 区分、破たん懸念以下を 1 区分として、計 5 区分として格付を取り扱う^{*10}。また、この 5 つの格付とは別に、吸収項として、上側吸収項としての「通常終了」区分、下側吸収項として「デフォルト後終了」区分の 2 つの吸収項を考え、計 7 つの格付区分による格付推移を考える^{*11}。

以下に、デフォルト債務者のその後の格付推移と回収の状態を示すイメージ図を記す (図 1)。

3 回収率の推計

本節では、本稿における回収率を定義し、回収率推計に用いるモデルの説明を行う。

^{*8}詳細は、第 4 節「EL の計算方法」を参照のこと。

^{*9}格付推移行列における吸収項の詳細は、上述した、楠岡・青沼・中川 (2001) や青沼・市川 (2008) 等を参照のこと。

^{*10}バーゼル II では、債務者に対する内部格付モデルの格付は、非デフォルト区分を 7 区分以上、デフォルト区分を 1 区分以上、それぞれ設定して格付区分を設けるように要求されている (日本銀行金融機構局, 2005)。

^{*11}詳細は第 5.2 節を参照のこと。

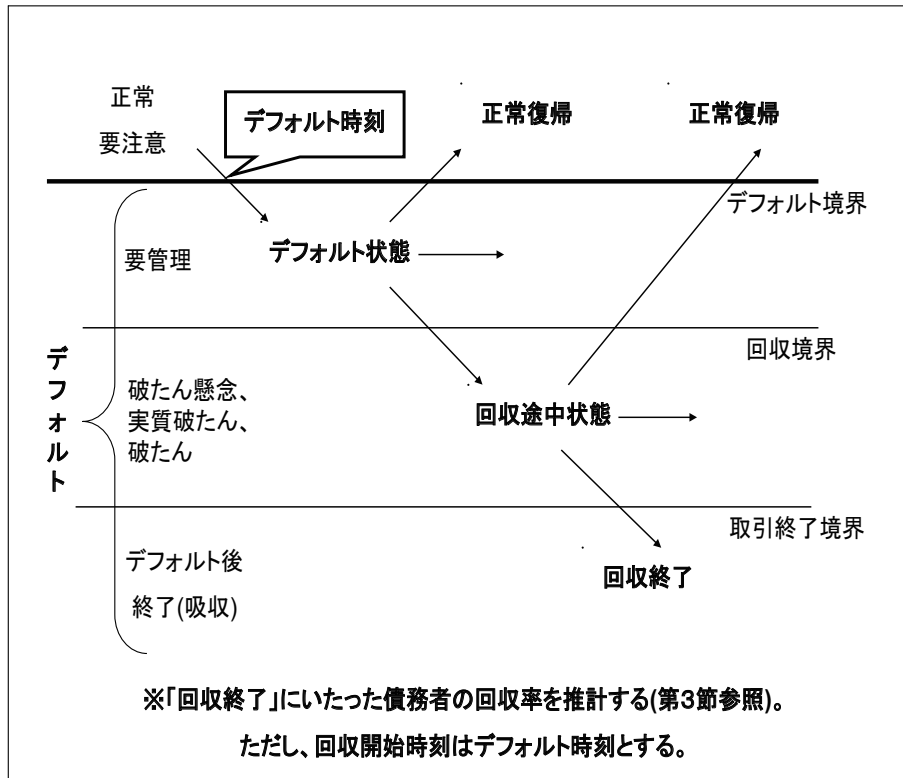


図 1: デフォルトした債務者の格付推移と回収のイメージ図

3.1 回収率の定義

回収率の定義は債務者ベースと案件ベースで考えるものに大別されるが、本稿における回収率は債務者ごとの回収率とする^{*12}。また、第2節で述べたように、本稿におけるデフォルトの定義は要管理以下の格付に落ちるイベントとする。そこで、回収率の分母にあたる EAD(Exposure At Default) は、デフォルト時点(要管理以下に格付が落ちたとき)の債務者の与信残高とみなす。このとき、デフォルトを要管理以下への格付降下と定義するが、実際の与信業務においては、デフォルト後も融資を行っており、回収キャッシュフローだけを集計しても、ロールオーバーによる回収とそれ以外の回収を区別できず、追加融資による与信残高の増加を捉えられない。本稿では債務者の与信残高の差額から回収キャッシュフローを定義した。

3.2 回収率推計モデル

以下では、回収率推計に用いるモデルを説明する。ここで推計する回収率は、第2節で述べた「デフォルト後終了」区分に格付が付与された債務者の回収率を想定している。

一般に、デフォルト後の債務者においては、デフォルト後の回収率は増加して(与信残高は減少して)いき、ある値に収束すると考えられる。従って、以下のように回収率 RR は指数的に一定値に収束すると仮定する^{*13}。

$$RR_i(t) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta' \mathbf{X}_i)} \{1 - \exp(-\alpha t)\} + \epsilon_{i,t} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^d$ は債務者 i の担保や保証、財務指標などの d 次元の説明変数ベクトル、 α は回収率の期間構造の収束パラメータ、 $\beta \in \mathbb{R}^d$ は d 次元の説明変数の係数パラメータベクトルである。この関数は、デフォ

^{*12}パーゼル II における先進的内部格付手法 (AIRB) においては、案件ごとの回収率を推計すべきであるとの要請がある。しかし、複数の案件を有する債務者のデフォルト後返済行動においては、返済の総額が重要視され、特定の案件に対する返済を個別に注視することはまれである。そのため、案件別付帯要因が返済額に与える影響は小さく、案件別回収率の推計が困難な状況にある。また、同一債務者の各案件の回収率には何らかの相関があるものと考えられるが、その推計手法は確立されていない。従って、本稿においては債務者ベースの回収率を推計した。

^{*13}本稿では、時間を表す T と区別するために、行列の転置を表す記号を $'$ で表現する。

ルトした債務者のデフォルト時 ($t = 0$) における回収率を 0 とし、 t が大きくなるにつれて回収率 $RR_i(t)$ が増加し、 t が十分大きい時に債務者 i の担保や保証によって決まる一定値に収束することを表わしている。

次節以降でみるように、回収率の推移はデフォルト後には基本的に増加し、デフォルト後の時間経過とともにある一定値 (最終的な回収率の値) に収束すると考えられる。(4) で表されるモデルは、時間の経過の項 ($1 - \exp(-\alpha t)$) と、担保カバー率、保証カバー率など回収率の説明変数の関数である、回収率の最終的な収束値 ($1/(1 + \exp(-\beta' X))$) の項によるものである。

また、パラメータの推計方法は、最小二乗法を用いる^{*14}。すなわち、回収率推計に用いる債務者数が N 、観測期間を T とすると、求めるパラメータの推計値 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ は、

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \epsilon_{i,t}^2$$

により推計する。回収率は基本的には $[0,1]$ の値をとり、その値に存在するときには (4) 式は一般化線形モデルの枠組みで捉えられ、尤度関数を定義し最尤推定量を求めることができる^{*15}。しかし、本稿における回収率は、負の値や 1 より大きい値を有し、それらの値を用いた尤度関数は容易に定義できないため、本稿では単純な最小二乗法を用いた。

以下に、時刻 $t = \tau$ においてデフォルトした債務者のパラメータの推計値 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ が得られたときの (4) のモデルの表す回収率の推移曲線のイメージ図を記す (図 2)。

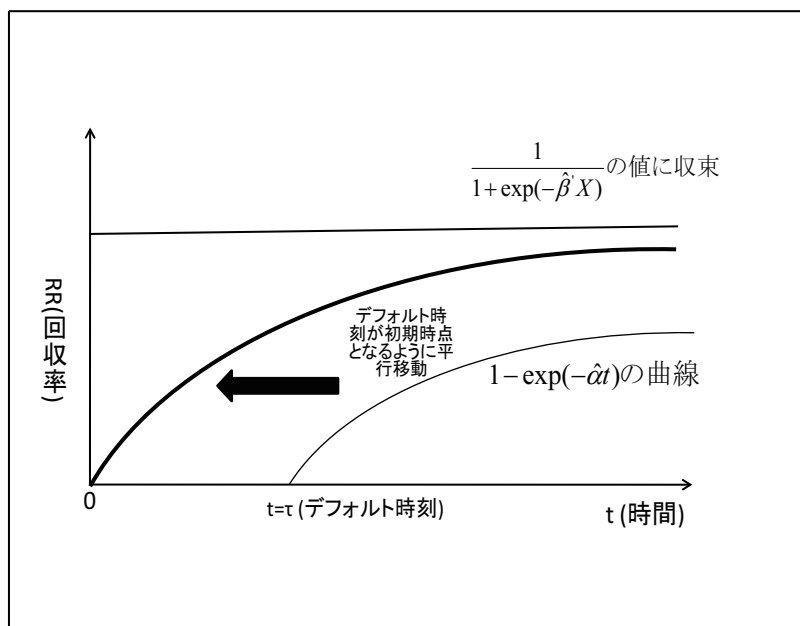


図 2: 回収率推計モデルのイメージ図

4 EL の計算方法

ここまで、PD の推計方法や回収率の推計方法に関して個別に説明してきた。しかし、先進的内部格付手法 (AIRB) に用いる信用リスクの推計には、各債務者の PD と LGD の積として定義される EL の推計値が必要であるため^{*16}、PD と回収率が同時に推計される手法は非常に有効である。そこで、本稿では、上述してきた格

^{*14}用いたデータには外れ値が多く存在することがある。その際に最小二乗法や最尤推定法よりもロバストな推計方法を考える必要があるが、本稿においては簡便性を優先し、上述の方法を用いた。

^{*15}回収率に対して一般化線形モデルの枠組みで説明したものとして、例えば森平 (2009)などを参照のこと。

^{*16}先述の通り、本稿における EL は EAD の推計値を含まず PD と LGD の積で定義されるものとする。

付推移行列と回収率推計モデルから、PD と LGD の推計値が同時に求められることを示す^{*17}。まず、格付推移行列において、「通常終了」と「デフォルト後終了」の2つの吸収項が存在すると仮定する。そのほか、正常、要注意先など、吸収項を含めて計 K 区分の格付が存在するものとする。なお、この格付方法は、青沼・市川 (2008) に準拠している。

この仮定のもと、格付 $k (\in \{1, 2, \dots, K\})$ で (4) 式における説明変数 \mathbf{X} をもつ債務者の債権価値を $V_k(\mathbf{X})$ と表す。このとき、格付 1(通常終了)の債務者の債権価値は 1 だから $V_1 = 1$ となり、格付 K (デフォルト後終了)の格付の債権価値は前節で述べた方法によりモデルから推計する。具体的には、(4) 式において、 $t \rightarrow +\infty$ として最終的な回収率の値を求める。債務者 j が格付 K であるとき、以下の式によって得られる。

$$\begin{aligned} V_K(\mathbf{X}_j) &= \text{RR}_j(t \rightarrow +\infty) \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-\hat{\beta}' \mathbf{X}_j)} \end{aligned} \quad (5)$$

また、その他の格付 $k \in \{2, 3, \dots, K-1\}$ の債権価値は、当該債務者が翌期に推移する格付の債権価値の現在価値といえる^{*18}から、以下の連立方程式から求められる。

$$\begin{pmatrix} V_1(\mathbf{X}) \\ V_2(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ V_{K-1}(\mathbf{X}) \\ V_K(\mathbf{X}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p(2,1) & p(2,2) & p(2,3) & \dots & p(2,K) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(K-1,1) & p(K-1,2) & p(K-1,3) & \dots & p(K-1,K) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(\mathbf{X}) \\ V_2(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ V_{K-1}(\mathbf{X}) \\ V_K(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

従って、(6) 式から、 $V_1(\mathbf{X}) = 1$ とデフォルト後終了区分の回収率 $V_K(\mathbf{X})$ が得られれば、すべての格付において、説明変数 \mathbf{X} を有する債務者の EL の推計値が得られる。このとき、得られる EL は、格付に対応するだけでなく、 $V_K(\mathbf{X})$ が各債務者の担保カバー率や保証カバー率の関数として得られていることから、各債務者の担保や保証に対応した各債務者ごとの EL が求められることになる^{*19}。以上の結果を以下の表 2 にまとめた。

表 1: 各格付における PD と債権価値 V 、及び EL の推計方法

格付	PD	債権価値 V	EL
1(通常終了)	0	1	0
2(正常等)	$\sum_{l=D}^K p(2,l)$	$V_2 = \sum_{l=1}^K p(2,l)V_l$	$\text{EL}_2 = \sum_{l=D}^K p(2,l)(1 - V_l)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D(要管理等)	$\sum_{l=D}^K p(D,l)$	$V_D = \sum_{l=1}^K p(D,l)V_l$	$\text{EL}_D = \sum_{l=D}^K p(D,l)(1 - V_l)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
K-1(破たん等)	$\sum_{l=D}^K p(K-1,l)$	$V_{K-1} = \sum_{l=1}^K p(K-1,l)V_l$	$\text{EL}_{K-1} = \sum_{l=D}^K p(K-1,l)(1 - V_l)$
K(デフォルト後終了)	1	実績データを用いて (5) 式で V_K を推計	$\text{EL}_K = 1 - V_K$

^{*17}従って、パーゼル II の定義する計算式によって UL(Unexpected Loss) も計算できることになる。

^{*18}パーゼル II において、債権および回収率の現在価値は、当該債務者の信用リスクに見合った金利でディスカウントされるべきであると述べられている。しかし、本稿においては、簡単のために金利によるディスカウントは考慮していない。

^{*19}詳細は第 6.3 節を参照のこと。

5 データについて

使用したデータは、平成 17 年 4 月から平成 21 年 1 月までの 46 ヶ月間において、内部格付が付与された債務者である。債務者ベースではおよそ 3 万件、回収キャッシュフローベースではおよそ 700 万件のデータが存在した。

5.1 格付推移行列

まず、使用したデータの格付推移行列を求める。ここでの格付推移行列は、使用したデータの観測期間である H17 年 4 月～H21 年 1 月までの全期間において観測された格付の推移をもとに求めたものである。また、上述の通り、格付区分は 5 区分にまとめ、さらに上下に 1 つずつの吸収項 (通常終了とデフォルト後終了) を設けた。

5.2 デフォルトした債務者の回収率の推移

平成 17 年 4 月から平成 21 年 1 月までの 46 ヶ月間の期間においてデフォルト (要管理以下に格付が低下) した債務者の回収率推移の期間構造をみる。以下に続くグラフは、横軸がデフォルト後の経過時間 (月次)、縦軸が回収率 (RR) を表わす^{*20}。このグラフは、各債務者のデフォルトした時点を時間軸の 0 の点とし、デフォルト後の回収期間が 46 ヶ月に満たない債務者は、最後のキャッシュフローがあった時点の回収率の値を用いて 46 ヶ月目まで補正している。また、各グラフ中において、デフォルト後の回収率が負の値をとる債務者があるが、これらの債務者はデフォルト時点の残高 (EAD) よりもデフォルト後の残高が増加していることを示しており、デフォルト後の追加融資を反映している。

まず、デフォルトした債務者全体 (後に正常復帰した債務者やデフォルト後終了した債務者を含む) の回収率の推移を記す (図 3)。

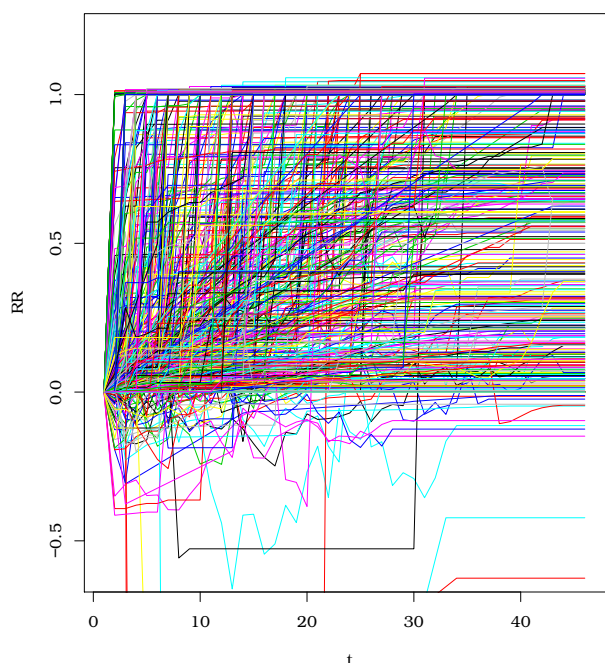


図 3: デフォルトした債務者の回収率の推移

^{*20} デフォルト後に正常復帰した債務者における回収キャッシュフローは、正常復帰後は回収率ではなく与信残高の推移とみなすべきであるが、ここでは便宜上、回収率と表記する。

図 3 のグラフにおいて、 $t = 0$ から回収率は増加していく傾向がある。その一方で、デフォルト後に回収率が負の値をとっている債務者もあり、デフォルト後に追加融資を行っている債務者が存在する。

6 実データを用いた実証結果

本節では、第 3 節で述べたモデルを用いて、「デフォルト後終了」区分の債務者の回収率の推計値を求める。まず、実際のデフォルト後終了債務者の回収率の値、及び、回収率の説明変数として有効と考えられる、担保や保証と回収率の関係を考察したのち、モデルの推計を行う。

6.1 担保カバー率、保証カバー率

本稿においては、デフォルト後終了債務者の担保カバー率・保証カバー率を、デフォルト時の担保額・保証額をデフォルト時の残高で除することにより定義する。

$$\begin{aligned}\text{担保カバー率} &= \frac{\text{デフォルト時の担保額}}{\text{EAD}} \\ \text{保証カバー率} &= \frac{\text{デフォルト時の保証額}}{\text{EAD}}\end{aligned}$$

従って、各債務者の担保カバー率、保証カバー率は時間によらない値である。

6.2 統計モデルにおけるパラメータ推計

第 3.2 節で述べた回収率推計モデルにおけるパラメータ推計の結果を示す。デフォルト後終了に至った債務者データを用いた回収率推計モデル (4) 式におけるパラメータ推計結果は、

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= 0.119 \\ \hat{\beta} &= (-0.0292, 2.59, 1.79)\end{aligned}$$

が得られた。ここに、 β は定数項、担保カバー率、保証カバー率の係数である。

この結果から、担保カバー率、保証カバー率ともに回収率に有意に正の寄与を与えることがわかる。また、得られた係数の推計値の大小から、担保カバー率の大きさは、保証カバー率の大きさよりも回収率に大きく正の寄与を与えていることがわかる。これは、先に述べたように、保証カバー率の大きさは回収率の大きさに担保カバー率ほど影響を与えていない (保証カバー率の小さい債務者においても、回収率は大きくなる) ことと整合的である。

次に、得られたパラメータの推計値を用いて、具体的に担保カバー率、保証カバー率を仮定した債務者の例を想定し、各債務者例の回収率の推計値を記す。

6.3 EL の推計結果

以上の結果から、デフォルト終了後の債務者の回収率が推計されたことになる。よって、第 4 節における債権価値 $V_K(\mathbf{X})$ の推計値が得られたことになる。このとき、 $V_K(\mathbf{X})$ は各債務者の担保カバー率、保証カバー率の関数となっており、(6) 式を用いることによって、すべての格付の債務者に対して、担保カバー率や保証カバー率を考慮した債権価値、及び、EL が推計されることになる (第 4 節・表 2 を参照のこと)。ここでは第 4 節で述べた EL の計算方法を用いて実際の EL の推計値を求める。

表 2: 得られたパラメータを用いた、担保カバー率・保証カバー率を仮定した債務者の回収率の例

	担保カバー率 (%)	保証カバー率 (%)	回収率の推計値 (%)
債務者・例 1	0	0	49.3
債務者・例 2	25	0	65.0
債務者・例 3	50	0	78.0
債務者・例 4	0	50	70.4
債務者・例 5	0	100	85.5

担保カバー率、保証カバー率を仮定した債務者例^{*21}を考え、これらの債務者の EL を推計する。格付は表 2 で示した格付区分に準拠するものである。以下にその結果を示す^{*22}。

表 3: 格付、担保カバー率・保証カバー率を仮定した債務者の回収率、及び EL 推計値の例

	格付	担保カバー率 (%)	保証カバー率 (%)	回収率の推計値 (%)	PD(%)	EL(%)
債務者・例 1	6	0	0	49.3	95.8	43.5
債務者・例 2	6	25	0	65.0	95.8	30.0
債務者・例 3	4	50	0	78.0	4.79	0.887
債務者・例 4	4	0	50	70.4	4.79	1.19
債務者・例 5	3	0	100	85.5	1.52	0.185
債務者・例 6	2	0	100	85.5	0.396	0.0489

債務者例 1 と例 2、債務者例 3 と例 4 は格付がそれぞれ同じであるが、担保カバー率、保証カバー率が異なる。それに伴って、回収率の推計値だけでなく、EL の推計値も異なる。このことから、各格付における担保カバー率、保証カバー率の関数として EL の推計が可能であることがわかる。また、債務者例 5 と例 6 は担保カバー率、保証カバー率は同一の値であるが、格付が異なる例であり、格付によって PD が異なるため、同一の担保・保証カバー率を有する債務者においても異なる EL の値が推計されていることが示される。

7 結論、及び、ディスカッション

本研究においては、実データを用いた回収率モデルを構築した。その際に考慮した点は、以下の点である。

1. バーゼル II の準拠を考慮し、デフォルトを内部格付低下により定義した。
2. デフォルト後の正常格付への復帰を考慮した。
3. デフォルト後に正常復帰することなく格付付与が終了した債務者の回収率を統計モデルで推計した。
4. 回収率モデルでは、実際の回収が長期間にわたるため、時間に対するパラメータを挿入した。
5. 最終的な期待回収率を、時間パラメータ、担保カバー率、保証カバー率の 3 つを要因とした非線形関数で表現した。

以上のような設定においてモデリングした結果、回収率の推計値を得ることにより、すべての格付の債務者に対する期待損失率（EL の推計値が求められた。実際の回収率の推移に関しては、担保カバー率、保証カバー率ともに回収率に正の寄与をもたらし、担保カバー率の大きさは保証カバー率の大きさよりも大きく寄与することがわかった。

以下に今後の課題を述べる。本研究においては、担保や保証を有する債務者の回収の期間構造は同一とみなしてパラメータ推計を行ったが、実際には異なる期間構造を有すると考えられる。この点を考慮したモデリングが必要である。また、回収率の説明変数として担保と保証のみを扱ったが、先行研究においては債務者の業

^{*21}例 1～5 の債務者は、先の表 4 における債務者例と同様の債務者を仮定している。

^{*22}表中の PD の推計値は第 5.2 節で得られた値を用いている。また、EL の推計値は第 4 節の表 2 の推計方法により求めている。

種や銀行との取引期間の長さなどが説明変数として考えられるとしているとの結果もあるため、それらの検証を行う必要があり、担保や保証以外で回収率に寄与している考えられる説明変数を加えたモデリングを行う必要がある。最後に、本稿では債務者ごとの格付を用いて回収率を推計したが、先進的内部格付手法においては案件ごとの回収率を推計する必要がある。その際、担保や保証の種類によって回収率に差があると考えられるので、その点も考慮した回収率の推計モデルが必要であると考えられる。

参考文献

- [1] Basel Committee on Banking Supervision (2004) International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework, *Bank for International Settlements*.
- [2] Martin, D. (1979) Early warning of bank failure: A logit regression approach. *Journal of Banking and Finance*, Nov. Vol.1 249-276.
- [3] 青沼君明、市川伸子 (2008) EXCEL で学ぶバーゼル 2 と信用リスク評価手法、金融財政事情研究会.
- [4] 伊藤有希、山下智志 (2007) 中小企業に対する債権回収率の実証分析、金融庁金融研修センター・リサーチレビュー 2007, 189-218.
- [5] 楠岡成雄、青沼君明、中山秀敏 (2001) クレジット・リスク・モデル—評価モデルの実用化とクレジット・デリバティブへの応用、金融財政事情研究会.
- [6] 日本銀行金融機構局 (2005) 内部格付制度に基づく信用リスク管理の高度化、リスク管理高度化と金融機関経営に関するペーパーシリーズ.
- [7] 森平爽一郎 (2009) 信用リスクモデリング-測定と管理-、朝倉書店.

公的年金を構成する 5 資産の月次リターンデータの分析

横内 大介*

2010 年 10 月 21 日

1 はじめに

本研究は、年金積立金管理運用独立行政法人（GPIF）の平成 21 年度企画競争入札調査研究 [10] で得られた成果の一部を論文として発表するものである。本稿で述べられている見解は、GPIF の公式見解と完全に独立で、著者ら独自のものであることをお断りしておく。

調査研究の目的は、GPIF が提示した 5 つ資産（国内債券、国内株式、外国債券、外国株式、短期資産（短期金利））の最適ポートフォリオの構築および、そのシミュレーションである。このようなシミュレーションを精緻で頑健なものとするためには、各資産のリターンを表すモデルのあてはまりがよさが最も重要となる。特に年金財政のような長期間のシミュレーションを行う場合には、不正確なモデルが引き起こす誤差の蓄積は無視できない。本報告ではこの調査研究の最も基礎となる各資産のリターンの統計的特徴の抽出、および最適な統計モデルの探索の結果について詳細に述べる。なお、本調査研究では、今回のモデルフィッティングの結果をコピュラの周辺分布として利用し、各資産の従属関係を考慮した年金財政のシミュレーションを実現している。このコピュラを利用したシミュレーションの結果については [10] に詳しく論じられているので参照されたい。

本稿の第 2 節では、各資産の月次リターンの特徴を記述統計量、自己相関の検定、正規性の検定などを通して調べた概要を述べる。第 2 節の分析結果によりいくつか資産のリターンには自己相関や不均一分散がみられることが分かったので、その結果を踏まえ、第 3 節では金融資産のリターン系列の統計モデリングで頻繁に用いられる自己回帰 (Auto Regressive, AR) モデルや一般化自己回帰条件付き分散不均一 (Generalized Auto Regressive Conditional Hetero-skedasticity, GARCH) モデルなどのフィッティングをおこなった結果について述べる。さらに、短期資産のリターンでは政府や日銀の金融政策による構造の変化、いわゆる非定常性がみられたため、区分的に AR モデルをフィッティングすることによってこの非定常過程の近似することを試みた。その結果についても併せて述べる。

2 5 資産の統計的特徴

本節では 5 資産の月次リターンデータから求めた記述統計量、および正規性、自己相関に関する統計的仮説検定の結果について述べる。表 1 は標本平均、標本分散、標本歪度、標本尖度の 4 つの記述統計量、自己相関検定である Ljung-Box 検定 (LB Test)、正規性検定である Shapiro-Wilk 検定 (SW Test)、Jarque-Bera 検定の 3 つの検定の結果、AIC の基準で選択した自己回帰モデルの次数 (AR Order) を与えている。なお、Ljung-Box 検定の帰無仮説は「データに自己相関がない」、Shapiro-Wilk 検定、Jarque-Bera 検定の帰無仮説は「データは正規分布している」である。

*一橋大学国際企業戦略研究科 yokouchi@ics.hit-u.ac.jp

表 1: 記述統計量および検定の結果

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
標本平均	0.00488	0.00490	0.00385	0.00480	0.00333
標本分散	0.00011	0.00275	0.00103	0.00277	0.00001
標本歪度	-0.16893	-0.44829	-0.59935	-1.1030	0.53368
標本尖度	3.530692	1.685472	2.545696	4.317683	-0.458689
LB test p value	0.00001	0.08930	0.20733	0.40926	0.00000
SW test p value	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
JB test p value	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
AR order	1	2	0	1	7

標本平均は国内債券、国内株式、外国債券の 3 つがほぼ同水準の値を示し、他のアセットよりも高い。標本分散をみると短期資産が最も低い。国内、外国株式は他の資産にくらべて標本分散が 1 桁大きい。標本歪度、標本尖度をみるかぎり、どの資産のリターンも正規分布しているとは言い難く、Shapiro-Wilk 検定と Jarque-Bera 検定の結果でも有意水準 5 % で「正規分布している」という帰無仮説を棄却していることから、どの資産のリターンも正規性がないということを示唆している。Ljung-Box 検定の結果では、5 つのアセット中 3 つ（国内債券、国内株式、短期資産）のデータは、有意水準 10% で帰無仮説を棄却している。AIC に基づく自己回帰モデルの選択では、外国債券を除くすべてのアセットで 1 以上の次数の AR モデルが選ばれている。

3 各資産への統計モデルの当てはめ

3.1 国内債券

2 節の統計的な特徴から、国内債券の月次リターンに自己相関があることを考慮して、月次リターン $r_{1,t}$, $t = 1, 2, \dots, 315$ に対して自己回帰モデル (AR(p))

$$r_{1,t} - \mu_1 = \sum_{i=1}^p \phi_{1,p}(r_{1,t-i} - \mu_1) + \epsilon_{1,t}$$

を当てはめた。ここで μ_1 は $r_{1,t}$ の平均、 $\epsilon_{1,t}$ をホワイトノイズとする。推定結果は

$$r_{1,t} - 0.004888729 = 0.2387878(r_{1,t-1} - 0.004888729) + \epsilon_{1,t}$$

となった。ACF, PACF で残差の相関を調べたが、大きな相関は見られなかった。さらに、残差および残差の 2 乗に対して Ljung-Box 検定を行った結果、それぞれの p 値は 0.5122, 0.7552 となり「自己相関なし」という帰無仮説を有意水準 5 % で棄却できなかった。また、Lagrange 乗数検定 [5] でも「ARCH 効果なし」という帰無仮説が有意水準 5 % で棄却できず、残差が不均一分散しているという仮定をおくことは、データにそぐわないということが分かった。一方、Shapiro-Wilk の正規性の検定では「正規分布している」という帰無仮説が有意水準 5 % で棄却された。これらの結果から、残差系列は非正規ホワイトノイズであると推定される。

図 1 は残差のヒストグラムである。正規分布と比べ、急尖的でわずかに左に歪んでいるように見える。図 2 の正規 QQ プロットをみれば、その特徴ははっきりと確認できる。この急尖性と歪みを説明するために、残差に対して両側指数分布 [8], Skewed 正規分布 [2], Skewed t 分布 [3][6] の 3 つ

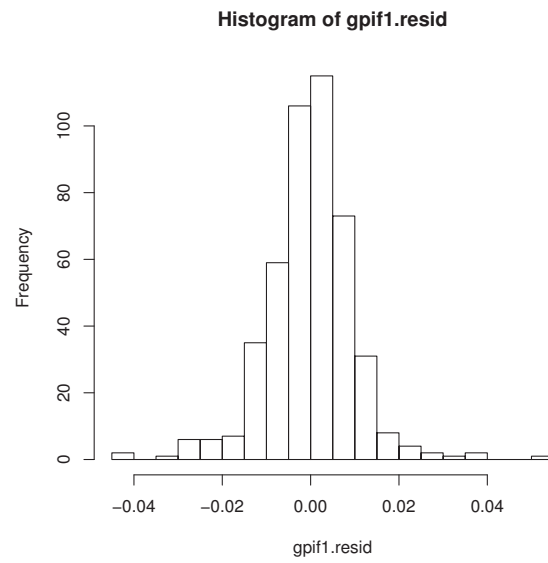


図 1: 残差のヒストグラム

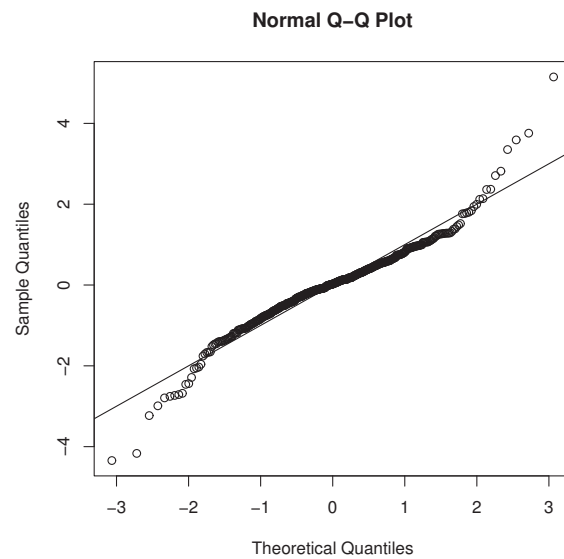


図 2: 正規分布に基づく QQ プロット

の分布を仮定し、最尤法によるパラメータ推定をおこなった。さらに各分布への適合度を調べるために Kolmogorov-Smirnov 両側検定を行った（帰無仮説は「2つの分布は等しい」）。p 値はそれぞれ、0.6918, 0.4137, 0.9907 となり、Skewed t 分布が最もよく当てはまっていた。図 3 は最尤法で推定した Skewed t 分布に基づいて作成した QQ プロットである。

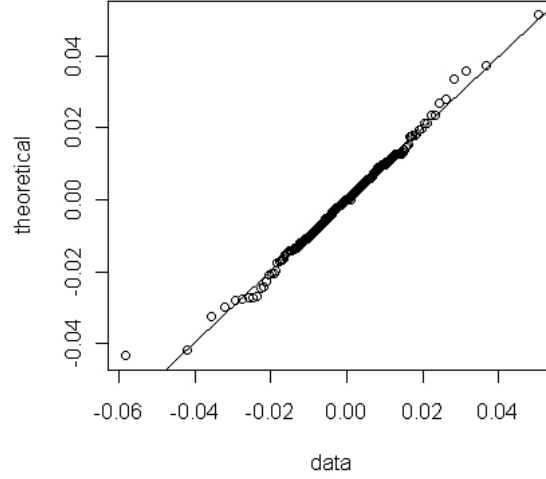


図 3: Skewed t 分布に基づく QQ プロット

なお、 $g(\cdot|\nu)$ を t 分布の密度関数とすると、Skewed t 分布の密度関数は

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2\sigma}{\xi+\xi^{-1}} g[(y+\mu)\xi|\nu], & y < -\frac{\mu}{\sigma} \\ \frac{2\sigma}{\xi+\xi^{-1}} g[(y+\mu)/\xi|\nu], & y \geq -\frac{\mu}{\sigma} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}(\xi - \frac{1}{\xi})$$

$$\sigma^2 = (\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1) - \mu^2$$

であり、最尤推定したパラメータ $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\nu}, \hat{\xi}$ の値は

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\nu}, \hat{\xi}) = (0.00008, 0.010383, 3.578743, 0.9328305)$$

となった。最終的に得られた $r_{1,t}$ のモデルは、

$$r_{1,t} - 0.004888729 = 0.2387878(r_{1,t-1} - 0.004888729) + \epsilon_{1,t}$$

$$\epsilon_{1,t} \sim ST(0.00008, 0.010383, 3.578743, 0.9328305)$$

である。ここで ST は Skewed t 分布を表す。

3.2 国内株式

2 節において明らかになった自己回帰性にもとづいて、国内株式のリターン $r_{2,t}$, $t = 1, 2, \dots, 460$ に対して、自己回帰モデル AR(p)

$$r_{2,t} - \mu_2 = \sum_{i=1}^p \phi_{2,p}(r_{2,t-i} - \mu_2) + \epsilon_{2,t}$$

を当てはめた。推定されたモデルは

$$r_{2,t} - 0.004897324 = 0.11286704(r_{2,t-1} - 0.004897324) + 0.07207706(r_{2,t-2} - 0.004897324) + \epsilon_{2,t}$$

となった。Ljung-Box 検定を残差の 2 乗に対しておこなったが、「自己相関あり」という帰無仮説は有意水準 5% で棄却できず、Lagrange 乗数検定でも「ARCH 効果なし」という帰無仮説は棄却された。よって残差は不均一分散していると思われる。

誤差項 $\epsilon_{2,t}$ に不均一分散を考慮した GARCH(1,1) モデルをあてはめ、その仮定にもとづき標準化残差が正規分布に従うか調べた。Shapiro-Wilk の正規性検定では「正規性がある」という帰無仮説は有意水準 1% で棄却されなかったが、Jarque-Bera の正規性検定では同様の帰無仮説が有意水準 5% で棄却されてしまい、標準化残差に正規分布がうまくフィットしていないことが分かった。

そこで標準化残差にいくつかの歪んだ分布を仮定して GARCH モデルをあてはめた。それぞれの残差に対して Kolmogorov-Smirnov 両側検定を行ったところ、Skewed 正規分布を仮定した GARCH(1,1) モデルの当てはめがもっともよかった。

Skewed 正規分布を仮定した GARCH (1,1) モデルの推定結果は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}\epsilon_{2,t} &= -0.012104 + \nu_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 &= 0.011662 + 0.158111 \epsilon_{2,t-1}^2 + 0.795641 \sigma_{t-1}^2 \\ \hat{\xi} &= 0.911853\end{aligned}$$

ここで、 σ_t^2 はボラティリティを示す条件付き分散、 ν_t は Skewed 正規分布に従う標準化残差、 $\hat{\xi}$ は歪度パラメータの推定値である。

3.3 外国債券と外国株式

2 節で述べたように、外国債券、外国株式の月次リターンには自己回帰性がみられないことから、外国債券のリターン $r_{3,t}$, $t = 1, 2, \dots, 460$ の系列、外国株式の月次リターン $r_{4,t}$, $t = 1, 2, \dots, 460$ を直接調べることにした。それぞれのリターンの 2 乗に対して Ljung-Box 検定を実施したところ、「自己相関なし」という帰無仮説は有意水準 5 % で棄却できなかった。ARCH 効果を調べる Lagrange 乗数検定でも「ARCH 効果なし」という帰無仮説を棄却できなかった。それゆえ不均一分散する誤差項をもつモデルは外国債券、外国株式の月次リターンデータにそぐわないことが分かった。さらに 2 つのリターンの密度関数をノンパラメトリックに推定して形状を調べたところどちらも左に歪んで急尖的であった。このような分布形状と Kolmogorov-Smirnov 両側検定の結果を考慮し、我々は $r_{3,t}$, $r_{4,t}$ の確率分布として Skewed t 分布を採用した。最尤法によるパラメータの推定結果はそれぞれ

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\nu}, \hat{\xi}) = (0.004110356, 0.032455134, 4.900397270, 0.932651495)$$

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\nu}, \hat{\xi}) = (0.005545863, 0.051825211, 6.028012147, 0.825666298)$$

となった。

3.4 短期資産

短期資産の自己相関を調べたところ、他の資産とは異なり自己相関が非常に強く、ラグが大きくなるにつれ単調に減衰していた。図4の1つ目のグラフは短期資産の月次リターンの時系列図である。

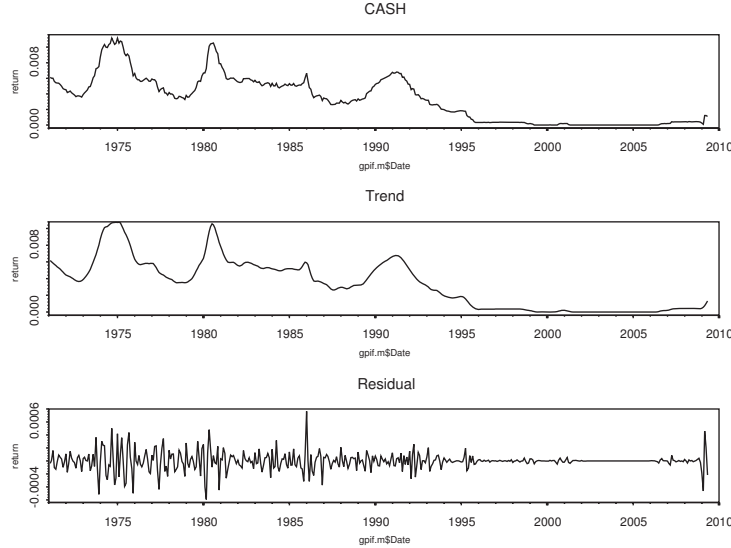


図4: 局所多項式回帰による短期資産のリターンの分解

明らかに定常性の仮定では説明できない確率的トレンドが存在している。本稿ではこのトレンドを局所多項式回帰 (locally weighted regression, LOESS) [12] [15] を用いて取り出した。図4の2つ目のグラフは $\text{span}=12$ の LOESS によって取り出されたトレンド、3つ目はその残差である。残差をみると1994年あたりから明らかに変動が小さくなっているのが分かる。これは日本銀行による超低金利政策による段階的な金利の引き下げ時期と合致している。このボラティリティの変化を表すために3.2節と同様に残差に対して GARCH モデルの当てはめを行ったが、標準化残差に大きな自己相関が残ってしまい GARCH による残差の説明は困難であることが分かった。

このように短期資産は政府の金利政策による影響を強く受けることから、データ期間中のリターン構造を単純な統計モデル1つで表現することは困難と判断し、区分的に AR モデルを当てはめることとした。つまり、非定常時系列を小区間に区分し、それぞれの区間に定常 AR モデルを当てはめることで非定常時系列を近似するわけである。この手法としては局所定常 AR モデル [7] が有名である。局所定常 AR モデルでは、複数のモデルの当てはまりを比較するための相対的な基準である AIC を用いて分割点を求めているため、統計的検定のようにその数値によって区分の妥当性までは確かめられない。そこで、我々は尤度比のアイデアを用いて区分の妥当性まで吟味するアルゴリズム、区分的 AR モデリングを開発した。

区分的 AR モデルのフィッティングアルゴリズムを説明する。月次リターンを $r_i, i = 1, 2, \dots, n$, その平均を μ とおく。 $x_t (= r_t - \mu)$ の AR (p) モデルを

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \epsilon_t \\ \epsilon_t &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

とする。[1, n] 期間において, $AR(p_0)$ が最小の AIC を達成したとする。対数尤度関数は

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n | \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{p_0}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=p_0+1}^n (x_j - \sum_{k=1}^{p_0} \phi_k x_{j-k})^2$$

とかける。この対数尤度関数を最大化してられた最尤推定量を $\Phi = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_{p_0}, \hat{\sigma}^2)$ とし, その最尤推定量を達成する対数尤度を $l_0 = l(x_1, x_2, \dots, x_n | \Phi)$ とおく。一方, 時点を m で区間 1 $[1, m]$, 区間 2 $[m+1, n]$ に区切り, 各区間で最小の AIC を達成する AR の次数 p_1, p_2 を計算する。区間 1, 2 における ϕ_i, σ^2 の最尤推定量を Φ_1, Φ_2 とし, それらを達成する対数尤度を $l_1 = l(x_1, x_2, \dots, x_m | \Phi_1)$, $l_2 = l(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n | \Phi_2)$ とおく。 $L(m) = l_1 + l_2$ が最大となる $m = m_{max}$ を計算し, 尤度比統計量 $l_0/L(m_{max})$ を求める。そして, この統計量の理論分布をモンテカルロシミュレーション (繰返し数 1 万回) で導出し, この理論分布を用いて統計的検定をおこなう。なお, 本稿では有意水準 5% で有意ならば分割点として m_{max} を採用している。図 5 は, 1990 年以降のデータにこのアルゴリズムを適用し, 得られた区分の結果である。

最終区間 (2008/9 から 2009/3) の残差に AR モデルの当てはめた結果は以下の通りである。

$$(\epsilon_{5,t} - 0.0006472902) = 0.4722268(\epsilon_{5,t-1} - 0.0006472902) + \xi_t$$

この AR モデルの残差および残差の 2 乗に対して Ljung-Box をかけた結果, p 値は 0.8857, 0.909 となり, 「自己相関なし」という帰無仮説は有意水準 5% で棄却できなかった。また, 正規性についても Shapiro-Wilk 検定, Jarque-Bera 検定の結果, p 値が 0.3248, 0.6153 となり「正規性あり」という帰無仮説を有意水準 5% で棄却できなかった。以上より, 直近の (最終区間の) LOESS の残差は正規ホワイトノイズをもつ AR(1) モデルで十分近似されている。ただし, 最終区間はデータの長さが十分でないことから, モデルの信頼度が高くない点には注意されたい。

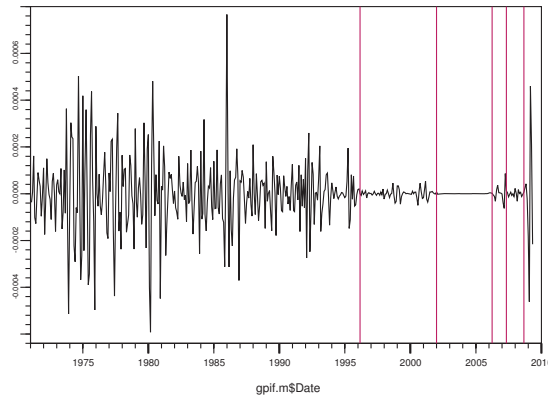


図 5: 残差の分割

4 まとめと今後の課題

．短期資産をのぞく 4 つの資産については, 歪んだ分布を用いたホワイトノイズ, AR, GARCH 等で十分な近似が得られた。しかしながら, モデルのあてはめ残差をグラフィカルに調べると, 資産

の組み合わせによっては、個々に当てはめた 1 変量のモデルだけでは説明できない相関が存在することが分かった。図 6 は、個々の残差の順位を計算し区間 $(0, 1)$ に基準化したあと、2 つの資産の同

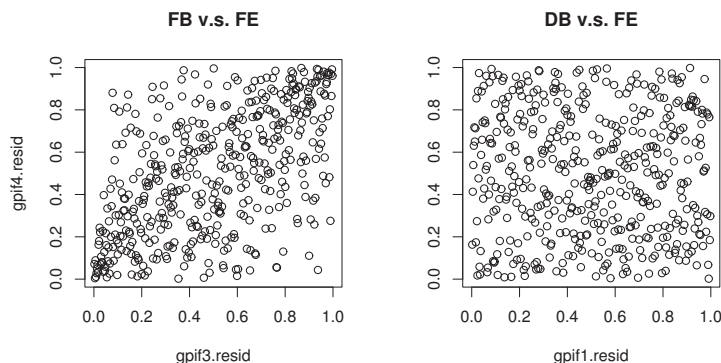


図 6: 残差の散布図:外国債券 v.s 外国株式, 国内債券 v.s. 外国株式

時点の順位を 1 つの点として散布図にしたものである。外国債券と外国株式の図では順位が低いところと高いところに点が集まっている。つまり収益率が高い時期と低い時期が一致しているということになり、リターン分布の裾で互いに従属性があるということを意味する。一方、国内債券と外国株式では、特に目立った依存性はみられない。

我々はこのようなリターン同士の従属関係の有無を表現する手段として、現在 vine copula [4] を用いた多変量モデルの当てはめを検討している。この 4 つの資産のリターンデータに対する vine copula のフィッティングについては、[10] で議論されているので各自参照されたい。

確率的トレンドのような非定常過程の性質を示す短期資産については、区分的 AR モデルを用いることにより直近時期のリターン構造の近似が得られた。しかしながら、区分的 AR モデルではモデルの切り替え時期を予測することが困難であり、年金財政のシミュレーション等に用いるためにはさらなる改良が必要があると思われる。

参考文献

- [1] Aas,K., Czado, C., Frigessi A. and H. Bakken (2009), “Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence”, *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**, 182-198.
- [2] Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999), “Statistical Applications of the Multivariate Skew-Normal Distribution”, *Journal of the Royal Statistical Society, series B*,**61**,579-602.
- [3] Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003), Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution, *Journal of the Royal Statistical Society, series B*,**65**, 367-389.
- [4] Bedford, T. and Cooke, R.M.(2002), “Vines-A New Graphical Model for Dependent Random Variables”, *Annals of Statistics*, **30**, 1031-1068.
- [5] Engle, R. F. (1982),“Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, **50(4)**, 987-1007

- [6] Fernandez C. and Steel M.F.J. (1998), “On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness”, *Journal of the American Statistical Association*, **93**, 359-371.
- [7] 北川源四郎 (2005) 時系列解析入門. 岩波書店.
- [8] Kotz, S., Kozubowski, T. J. and Podgorski, K. (2001), *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*, Boston: Birkhauser.
- [9] Longin, F. and Solnik, B.(2001), “Extreme Correlation of International Equity Markets”, *Journal of Finance*, **56(2)**, 649-676.
- [10] 中村信弘, 中川秀敏, 沖本竜義, 横内大介, 年金積立金管理運用独立行政法人 (平成 21 年度企画競争入札) 調査研究報告書, “公的年金運用におけるポートフォリオ最適化についての研究”.
- [11] Patton,A.(2006), “Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence”, *International Economic Review*, **47**, 527-556.
- [12] Shibata,R. and R. Miura (1997),“Decomposition of Japanese Yen Interest Rate Data through Local Regression”, *Financial Engineering and the Japanese Markets*, **4**, 125-146.
- [13] Rockafellar, R.T. and S. Uryasev(2000), “Optimization of Conditional Value-at-Risk”, *Journal of Risk*, **2**, 21-41.
- [14] Rockafellar, R.T. and S. Uryasev(2002), “Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions”, *Journal of Banking and Finance*, **26** , 1443-1471.
- [15] 島津秀康, 柴田里程 (2005), “局所回帰による時系列の分解から明らかになった野鳥羽数の環境要因変化との関連性”, 日本統計学会誌, **34**, 187-207.
- [16] Venables, W.N. and Ripley, B.D. (1997),*Modern Applied Statistics with S-PLUS*, Second Edition. Springer-Verlag.

「ブラウン運動のクオンタイルに基づく統計的データ分析の可能性」

2010 年 10 月 研究集会 山形にて。

一橋大学大学院国際企業戦略研究科 特任教授 三浦良造

概略。

一標本、二標本などの基本的な統計的問題では、観測が独立で同一分布に従う場合というのが、通常の数理統計学が扱う統計的仮定です。時系列分析においては、時系列的依存性をモデル化して、残る偶然変動を独立で同一分布に従うと仮定します。そこで用いられる基本的なノンパラメトリック統計量は、経験分布関数、順序統計量、順位統計量です。

今回の試みでは、観測が独立で同一分布に従う確率変数の累積和である場合に対応する統計的データ分析の可能性を見ることにします。

これまでの研究成果としては、連続時間のブラウン運動上に上記のノンパラメトリックな統計量に対応する“量”が定義されその確率分布が求められています。(参考文献を参照)それらは、すべて連続時間の確率過程(ブラウン運動、あるいは幾何ブラウン運動)上で考えています。これらの量は、数理ファイナンス分野で行われているエキゾチック・デリバティブズ(派生証券)をデザインするために使われてきました。これらの量は、連続時間の確率過程の軌跡の統計量(関数あるいは汎関数)として見ることもできます。そこで、これを離散時間の確率過程の軌跡の関数として見ることにより、観測が独立で同一分布に従う確率変数の累積和の統計量として考えることを試みます。このような試みは、ノンパラメトリック統計量に関しては、1960 年の Wendel 論文が最初ではないかと思われます(要検討)。

今回の発表では、確率過程の軌跡を実現した値とその値が実現した時刻の(値と時刻)二つに分けることにより、軌跡が持つ情報を分解します。時刻を見るという点がここでは新味です。上記の連続時間確率過程上のノンパラメトリック統計量がすべて **occupation time** が基礎になっているため、しかし、これまではその **occupation time** の“時間の長さ”だけしか使っていないので、ここでは“時間の位置”の情報として使う、それにより **occupation time** が持つ情報を使い尽くすという発想です。そのため、**Time-map** という(特に新しいわけではなく既視のものに言葉を与えただけですが)概念と用語を導入します。(値、時刻)のうち、時刻はこれで扱うとして、値は、実現値のレベルを示しますから、順序統計量に当たるクオンタイルを使います。順位もクオンタイルと共に使います。値をカウントするのが経験分布関数であるというわけです。

これらを準備として、一標本問題、二標本問題を考えます。推定、検定の問題を扱うことを試みますが、まずは、ドリフトがゼロであるという仮説を検定する統計量、二つの軌跡が並行して動いてできたものかどうかなどを考えます。データ分析事例としては、へ

ツジファンドリターンデータを使い、幾つかのグラフを示すことにします。

このような試みは、すでに時系列分析の理論がかなり出来上がっている現時点において無駄な試みかもしれません。しかし、現在までの時系列モデルが取りこぼしている情報を今回のような試みで拾い上げることができるのではないかと感覚的ではありますが思っています。例えば、時系列モデルでいう偶然誤差項が独立でなく継続して正の値がでやすい時期（金融市場ではこれをモメンタムがある時期などと呼んでいます）などの様子を拾いきれていないかもしれない、などです。

このような理論構築を試みているわけですが、昨年度の研究集会ではまだ“法螺”の段階であると申し上げましたが、今年度は少し形が見えてきたように思いますので、それをお話しします。しかし、まだまだ不完全な部分があると思われますので、今回の研究集会では、コメントをいただければ幸いです。

参考文献。

最初の試み？

:(1). J.G.Wendel(1960)。“Order Statistics of Partial Sums.” *Annals of Mathematical Statistics*.1034-1044

***quantiles(Brownian quantiles)関連の論文

:[1]. Akahori, J. (1995). “Some formulae for a new type of path-dependent option.” *Ann. Appl. Probab.* 5. 383-388.

:[2]. Dassios, A. (1995). “The distribution of the quantile of a Brownian motion with drift and the pricing of related path-dependent options. *Ann. Appl. Probab.* 5. 389-398.

:[3]. Dassios, A. (2005). “On the quantiles of Brownian motion and their hitting times.” *Bernoulli* 11(1), 2005, 29–36.

:[4]. Embrecht, P., Rogers, L.C.G. and Yor, M. (1995). “A proof of Dassios’s representation of the α -quantile of Brownian motion with drift.” *Annals of Applied Probability*. 5, 757-767.

:[5]. Fujita, T. (1997). “On the price of α -percentile options.” Working Paper Series #24, Faculty of Commerce Hitotsubashi University.

:[6]. Fujita, T. (2000). “A note on the joint distribution of α , β percentiles and its applications to the option pricing.” *Asia-Pacific Financial Markets*. Vol.7(4), 339-344.

:[7]. Fujita, T. and Miura, R. (2002). “Edokko Options: A New Framework of Barrier Options.” *Asia-Pacific Financial Markets*. Vol.9(2), December, 141-151.

- : [8]. Fujita, T. and Ishizaka, M.(2002). “An application of New Barrier Options (Edokko Options) for Pricing Bonds with Credit Risk”.
Hitotsubashi Journal of Commerce and Management, Vol.37(1) pp.17-23.
- : [9]. Miura, R. (1992). “ A note on look-back option based on order statistics.”
Hitotsubashi Journal of Commerce and Management. 27,15-28.
- : [10]. Yor, M.(1995).”The distribution of Brownian quantiles.” Journal of Applied Probability. 2, 405-416.

Rank Processes に関する論文

- : [1]. Fujita, T. and Miura, R. (2004). “ The distribution of Continuous Time Rank Process.” To appear in Advances in Mathematical Economics, Vol.?, 2005. Springer Verlag.
- : [2] Miura, R. (2007). “Rank Processes, Stochastic Corridor and Applications to Finance.” Advances in Statistical Modeling and Inference. Edited by Vijay Nair. pp.529-542. World Scientific.

On the approximation for the distribution of multinomial ϕ -divergence goodness-of-fit statistic under nonlocal alternatives

PAN EI HTWE (Kagoshima University)

NOBUHIRO TANEICHI (Kagoshima University)

YURI SEKIYA (Kushiro Campus, Hokkaido University of Education)

ϕ -divergence is a measure for dissimilarity between distributions proposed by Csiszár (1967) and Ali and Silvey (1966). The ϕ -divergence measure between discrete distributions $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)'$ and $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)'$ is defined by

$$D_\phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^k q_j \phi\left(\frac{p_j}{q_j}\right),$$

where $\phi(t)$ is a real convex function for $t > 0$ with regularity conditions.

Let $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)'$ be distributed according to a multinomial distribution $\text{Mult}_k(n, \boldsymbol{\pi})$, where $\sum_{j=1}^k X_j = n$, $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$, $0 < \pi_j < 1$, $(j = 1, \dots, k)$ and $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)'$ is an unknown probability vector. In order to test the null hypothesis

$$H_0 : \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}$$

for some completely specified probability vector $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)'$, Zografos *et al.* (1990) introduced the ϕ -divergence family of statistics

$$C_\phi = \frac{2n}{\phi''(1)} \left\{ D_\phi\left(\frac{\mathbf{X}}{n}, \mathbf{p}\right) - \phi(1) \right\}, \quad (\phi''(1) \neq 0).$$

Without loss of generality, we consider a twice continuously differentiable convex function $\phi(t)$ for $t > 0$, satisfying $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ and $\phi''(1) = 1$ (Pardo *et al.* (1999)). So, the ϕ -divergence family of statistics is defined by

$$C_\phi = 2n D_\phi\left(\frac{\mathbf{X}}{n}, \mathbf{p}\right).$$

When we choose the following convex function ϕ_a^P as ϕ , ϕ -divergence measure becomes the power divergence measure

$$\phi_a^P(t) = \begin{cases} \{a(a+1)\}^{-1} \{t^{a+1} - t + a(1-t)\} & (a \neq 0, -1) \\ t \ln t + 1 - t & (a = 0) \\ -\ln t - 1 + t & (a = -1). \end{cases}$$

Therefore, the ϕ -divergence family of statistics C_ϕ includes the power divergence family of statistics proposed by Cressie and Read (Cressie and Read (1984) and Read and Cressie (1988)) as $C_{\phi_a^P}$. It is well known that the family of the statistics $C_{\phi_a^P}$ includes Pearson's X^2 statistic ($a = 1$), the loglikelihood ratio statistic ($a = 0$), the Freeman-Tukey statistic ($a = -1/2$), the modified loglikelihood ratio statistic ($a = -1$), the Neyman modified

X^2 statistic ($a = -2$), and the statistic recommended by Cressie and Read ($a = 2/3$). The power divergence is used not only for a test statistic, but also for representation of the degree of departure from symmetry for square contingency tables (Tomizawa *et al.* (1998)). Rukhin (1994) considered the family of statistics given by the following convex function ϕ_a^R as ϕ :

$$\phi_a^R(t) = \frac{(t-1)^2}{2\{a+t(1-a)\}}, \quad a \in [0, 1].$$

Then the statistic based on ϕ_a^R is defined as

$$C_{\phi_a^R} = n \sum_{j=1}^k \frac{(\hat{p}_j - p_j)^2}{ap_j + (1-a)\hat{p}_j}, \quad a \in [0, 1], \quad (1)$$

where $\hat{p}_j = X_j/n$, ($j = 1, \dots, k$). The family of the statistics $C_{\phi_a^R}$ includes Pearson's X^2 statistic ($a = 1$) and the Neyman modified X^2 statistic ($a = 0$). Furthermore, Lin (1991) considered the family of divergences given by the following convex function ϕ_a^L as ϕ .

$$\phi_a^L(t) = \{a(1-a)\}^{-1} \{at \ln t - (at+1-a) \ln(at+1-a)\}, \quad a \in [0, 1].$$

Then the statistic based on ϕ_a^L is defined as

$$C_{\phi_a^L} = \frac{2n}{a(1-a)} \left\{ - \sum_{j=1}^k s_j \ln s_j + (1-a) \sum_{j=1}^k p_j \ln p_j + a \sum_{j=1}^k \hat{p}_j \ln \hat{p}_j \right\}, \quad a \in [0, 1], \quad (2)$$

where $s_j = a\hat{p}_j + (1-a)p_j$, ($j = 1, \dots, k$). The family of the statistics $C_{\phi_a^L}$ includes the loglikelihood ratio statistic ($a = 0$) and the modified loglikelihood ratio statistic ($a = 1$) by considering continuity in a . Under null hypothesis H_0 statistic C_ϕ are asymptotically distributed according to central chi-square distribution with $k-1$ degrees of freedom. Yarnold (1972) obtained an approximation based on asymptotic expansion for the null distribution of Pearson's X^2 statistic. In a similar fashion to X^2 , asymptotic expansions for the null distributions of the loglikelihood ratio statistic and the Freeman-Tukey statistic were obtained by Siotani and Fujikoshi (1984), that of the power divergence statistic was obtained by Read (1984), and that of C_ϕ was obtained by Menéndez *et al.* (1997). Against H_0 , consider local alternative hypothesis

$$H_{1,n} : \pi_j = p_j + \frac{c_j}{\sqrt{n}} \quad \text{for all } j = 1, \dots, k,$$

where $\sum_{j=1}^k c_j = 0$. It is known that C_ϕ are asymptotically distributed according to the noncentral chi-square distribution with $k-1$ degrees of freedom and noncentrality parameter

$$\delta = \sum_{j=1}^k \frac{c_j^2}{p_j}$$

under $H_{1,n}$. Taneichi *et al.* (2001) derived the local Edgeworth expansion under $H_{1,n}$ and obtained an expression of approximation for the distribution of C_ϕ under $H_{1,n}$. That expression consists of a term of multivariate Edgeworth expansion for a continuous distribution and a discontinuous term to account for the discontinuity in \mathbf{X} . The discontinuous

term is expressed in a very complicated form, and it is too complicated to use in practice. So, using only the term of the multivariate Edgeworth expansion for a continuous distribution, Taneichi *et al.* (2001) proposed an approximation to the power of C_ϕ . Based on numerical investigation, it was concluded that an omission of the discontinuous term does not lead to a serious error in approximating the power of the test based on C_ϕ .

On the other hand, consider a nonlocal (fixed) alternative hypothesis

$$H_1 : \boldsymbol{\pi} = \mathbf{q},$$

where $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)'$ is a completely specified probability vector satisfying $0 < q_j < 1$, $(j = 1, \dots, k)$, $\sum_{j=1}^k q_j = 1$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ and \mathbf{q} does not depend on n . It is known that each C_ϕ is asymptotically distributed according to a normal distribution under H_1 . We summarize here the study of the limiting distribution of C_ϕ under H_1 . Broffitt and Randles (1977) showed that an appropriate normalized Pearson's X^2 statistic is distributed according to the standard normal distribution for fixed k and nonlocal alternatives. Read and Cressie (1988) extended the asymptotic normality to the power divergence statistics $C_{\phi_a^P}$. For the ϕ -divergence statistic C_ϕ , it is shown as follows:

$$\frac{C_\phi - 2nD_\phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{2\sqrt{n\sigma_\phi^2}} \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^2 &= \sum_{j=1}^k q_j (\phi'(r_j))^2 - \left(\sum_{j=1}^k q_j \phi'(r_j) \right)^2, \\ r_j &= \frac{q_j}{p_j}, \quad (j = 1, \dots, k), \end{aligned}$$

and \xrightarrow{L} denotes convergence in distribution.

Sekiya and Taneichi (2004) describe the local Edgeworth expansion under H_1 and derive the multivariate Edgeworth expansion assuming a continuous distribution for the distribution of power divergence statistics $C_{\phi_a^P}$. In this presentation, we derive the expansion for general ϕ -divergence statistic C_ϕ . Next, we describe the local Edgeworth expansion under H_1 and derive the multivariate Edgeworth expansion assuming a continuous distribution for the distribution of C_ϕ under H_1 . And then, we apply the expansion to the power approximation for C_ϕ against H_1 . Performance of the power approximation with other power approximations are numerically compared in the case of statistic $C_{\phi_a^R}$ given by (1) and the statistic $C_{\phi_a^L}$ given by (2).

REFERENCES

- [1] Ali, S. M. and Silvey, S. D. (1966). A general class of coefficients of divergence of one distribution from another, *J. Roy. Statist. Soc. B*, **28**, 131-142.
- [2] Broffitt, J. D and Randles, R. H. (1977). A power approximation for the chi-square goodness-of-fit test: simple hypothesis case, *J. Amer. Statist. Assoc.* **72**, 604-607.

- [3] Cressie, N. and Read, T. R. C. (1984). Multinomial goodness-of-fit tests, *J. R. Statist. Soc. B*, **46**, 440-464.
- [4] Csiszár, I. (1967). Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **2**, 299-318.
- [5] Lin, J. (1991). Divergence measures based on the Shannon entropy, *IEEE Trans. Information Theory*, **37**, 145-151.
- [6] Menéndez, M. L., Pardo, J. A., Pardo, L. and Pardo, M. C. (1997). Asymptotic approximations for the distributions of the (h, ϕ) -divergence goodness-of-fit statistics: application to Renyi's statistic, *Kybernetes*, **26(4)**, 442-452.
- [7] Pardo, L., Pardo, M. C. and Zografos, K. (1999). Homogeneity for multinomial populations based on ϕ -divergences, *J. Japan Statist. Soc.*, **29**, 213-228.
- [8] Read, T. R. C and Cressie, N. A. C. (1988). *Goodness-of-fit statistics for discrete multivariate data*, Springer-Verlag.
- [9] Rukhin, A. L. (1994). Optimal estimator for the mixture parameter by the method of moments and information affinity, in *Trans. 12th Prague Conference on Information Theory*, 214-219.
- [10] Sekiya, Y., and Taneichi, N. (2004). Improvement of approximations for the distributions of multinomial goodness-of-fit statistics under nonlocal alternatives, *Journal of Multivariate Analysis*, **91**, 199-223.
- [11] Siotani, M. and Fujikoshi, Y. (1984). Asymptotic approximations for the distributions of multinomial goodness-of-fit statistics, *Hiroshima Math. J.*, **14**, 115-124.
- [12] Taneichi, N., Sekiya, Y. and Suzukawa, A. (2001). An asymptotic approximation for the distribution of ϕ -divergence multinomial goodness-of-fit statistic under local alternatives. *J. Japan Statist. Soc.*, **31(2)**, 207-224.
- [13] Tomizawa, S., Seo, T. and Yamamoto, H. (1998). Power-divergence type measure of departure from symmetry for square contingency tables that have nominal categories, *J. Applied Statistics*, **25**, 387-398.
- [14] Yarnold, J. K. (1972). Asymptotic approximations for the probability that a sum of lattice random vectors lies in a convex set, *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1566-1580.
- [15] Zografos, K., Ferentions, K. and Papaioannou, T. (1990). ϕ -divergence statistics: Sampling properties and multinomial goodness-of-fit and divergence tests, *Commun. Statist.-Theory Meth.*, **19**, 1785-1802.

二項反応の一般線型モデルにおけるリンク関数について

鹿児島大学・理工 種市信裕
北海道教育大学・教育 関谷祐里
鹿児島大学・理工 Pan Ei Htwe

概要：

一般化線形モデル (Nelder and Wedderburn [4]) は random component (ランダム成分), linear predictor (線形予測子), link function (リンク関数) の3つの成分で構成される。本研究においては, 確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従い, ランダム成分が $Y = X/n$ である場合のリンク関数構築についての考察をおこなった。この場合, 最も良く用いられるリンク関数は正準リンク関数であるロジットリンク関数

$$\text{logit}(u) = \log\left(\frac{u}{1-u}\right), \quad (0 < u < 1)$$

であり, これによりロジスティック回帰モデルはパラメータ β_m , ($m = 0, \dots, k$), 共変量 x_m , ($m = 0, \dots, k$) を用いて,

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \sum_{m=0}^k \beta_m x_m,$$

ただし, $x_0 = 1$ である。また, リンク関数として標準正規分布の累積分布関数 (CDF) $\Phi(\cdot)$ の逆関数をリンク関数とするプロビットリンクを用いるとプロビットモデル

$$\Phi^{-1}(p) = \sum_{m=0}^k \beta_m x_m,$$

が得られる。いま, リンク関数を L^* とすると, ロジットリンクやプロビットリンクは 0.5 の回りで

$$L^*(u) = -L^*(1-u),$$

という意味で対称である。このリンク関数の対称性にそぐわない観測度数および共変量の場合には, モデルへの適合度は悪くなる。このような観測度数および共変量の場合に有効なのが補対数対数 (complementary log-log) リンクを用いた補対数対数モデル

$$\log\{-\log(1-p)\} = \sum_{m=0}^k \beta_m x_m,$$

である。対称性を持つロジットリンクから非対称な補対数対数リンクまでを包括的に扱うために, Aranda-Ordaz [1] はリンク関数の族

$$L_c^A(u) = \log\left\{\frac{(1-u)^{-c} - 1}{c}\right\}, \quad c > 0, \quad (1)$$

を提案した。このリンク関数の族は, $c = 1$ のときロジットリンクとなり $c \rightarrow 0$ の時極限として補対数対数リンクに一致する。

リンク関数は値域が $[0,1]$ の狭義単調増加関数 F の逆関数で与えることができる。 F としては累積分布関数 (CDF) を考えることが適当であり、通常おこなわれている。累積分布関数の逆関数で与えられたリンクは逆 CDF リンクと呼ばれ、ロジットリンク、プロビットリンク、補対数対数リンクはすべて逆 CDF リンクである。

本報告では、Burr [3] によって与えられた累積分布関数の族に基づき、分布関数により与えられる確率変数を変数変換して得られる確率変数に対する累積分布関数を用いて逆 CDF リンクを与えることにより、パラメータ値 $\gamma > 0$ に依存するロジットリンクおよび補対数対数リンクをそれぞれ $\gamma = 1$ の場合として含む二種類のリンク関数の族を構築した。また、元の累積分布関数の γ ($\gamma > 0$) によるべき乗も累積分布関数となることに基づき、Cauchy 分布に基づく逆 CDF リンク関数を $\gamma = 1$ の場合として含むリンク関数の族を与えた。さらに、(1) 式で与えられる Aranda-Ordaz [1] によるリンク関数の族の逆関数として与えられる分布関数族の γ 乗により与えられる逆 CDF 関数の族を構築した。この族は $\gamma = 1, c = 1$ の場合としてロジットリンク関数を含む。

一方、本報告では、これら構築されたリンク関数の族をふまえ、あるデータが与えられたとき、これらのリンク関数の族の中に含まれるロジットリンク、補対数対数リンク、Cauchy 分布に基づく逆 CDF リンク等、従来のリンクに基づくモデルで十分なのか、それともリンク族のそれ以外のリンクに基づくモデルが必要なのかを調べるための検定方法の提案をおこなった。さらに、有名な Bliss [2] によるカブトムシの死亡データ等、実際のデータを用いてリンク関数に基づくモデル選択の考察をおこなった。

参考文献

- [1] Aranda-Ordaz, F. J., On two families of transformations to additivity for binary response data. *Biometrika*, **68**, (1981), 357–363.
- [2] Bliss, C. I., The calculation of the dosage-mortality curve. *Ann. Appl. Biology*, **22**, (1935), 136–167.
- [3] Burr, I. W., Cumulative frequency function. *Ann. Math. Statist.*, **13**, (1942), 215–232.
- [4] Nelder, J. A. and Wedderburn, R. W. M., Generalized linear models. *J. R. Statist. Soc. A*, **135**, (1972), 370–384.

新たな臨床試験デザインへの取り組み － 無益性中止のアダプティブデザイン －

鈴木 ゆら，長谷川 貴大，吉田 祐樹，浦狩 保則
塩野義製薬株式会社 解析センター

1. はじめに

新薬開発における臨床試験デザインの一つとして，アダプティブデザイン (Adaptive design) に注目が集まっている．アダプティブデザインとは，試験の科学的適切性を損なうことなく，試験中に (中間解析を実施して) 試験計画の一部の変更を許容する試験デザインのことを指す．アダプティブデザインが注目されている理由は，倫理的要求への配慮，試験の成功率アップ，開発コスト低減，開発のスピードアップという臨床開発の現場における重要な要件に対する，試験デザイン上の手立てとなり得るためである．私たちはアダプティブデザインを実際の臨床試験に適用することを目標として，ここ数年間，アダプティブデザインの理論や実施に関する検討を進めてきた．

本稿では，まず 2 節でアダプティブデザインの概要を紹介する．そして 3 節では，特に無益性中止のアダプティブデザインに焦点を当てて手法の紹介を行い，無益性中止の各手法の性能評価を実施した結果を提示する．

2. アダプティブデザインとは

アダプティブデザインでは，通常，割付け結果を明らかにした中間解析の結果に基づいて試験デザインを変更する．ここでの試験デザインの変更のことをアダプテーション (Adaptation) という．主なアダプテーションの種類を表 1-1 に示す．

表 1-1 主なアダプテーションの種類

種類	内容
①試験中止	有効性が立証された場合に試験を早期中止する「有効性中止」と無益性が確認された場合に試験を早期中止する「無益性中止」の 2 つがある．
②治療群の中止	一部の処理群を削除して試験を継続する． 例) 複数の用量群が設定された試験での有効性を期待できない一部の用量群の削除，プラセボを含む非劣性試験からのプラセボ群の削除など
③症例数の再設定	試験開始前に想定していた治療効果やバラツキの大きさを中間解析までの集積データを用いて見直し，検出力の不足分を補うために必要症例数を再設定する． 割付け群を明らかにしない盲検下で行う方法と盲検性を解除した下で行う方法の 2 通りがある．
④割付け比の変更	処理群への割付け比を変更する． 例) 実薬対照試験の割付け比，被験薬群:実薬対照群=1:1 を中間解析後に 2:1 へ変更する．安全性プロファイルが確立している対照薬への割付け数を少なくし，被験薬への割付け数を多くする．

種類	内容
⑤エンドポイントの変更	副次エンドポイントの主要エンドポイントへの格上げ，あるいは複合主要エンドポイントの構成要素の変更．
⑥非劣性から優越性へのスイッチ	試験目的を非劣性の検証から優越性の検証へ変更する．
⑦第Ⅱ相と第Ⅲ相の結合（シームレスデザイン）	同一の患者集団，同一の治療法，同一のエンドポイントを用いて，後期第Ⅱ相（用量選択）と第Ⅲ相（有効性，安全性の検証）を継ぎ目なしに行う．

アダプティブデザインが注目される理由は，以下のような様々な魅力がある為である．

1) 倫理的要求への配慮：

患者に有害な治療法が施されないようにすることが絶対条件であることは勿論であるが，効果の期待できない治療法が必要以上に多くの患者へ施されないようにすることも重要である．表 1-1 の①での無益性中止，②の治療群の中止は，倫理面での要請を特に配慮したアダプテーションである．また，④の割付け比の変更では，より効果の期待できる治療群への割付け患者数を多くすることができる．

2) 試験の成功率アップ：

③の症例数の再設定，⑤のエンドポイントの変更はこの点を重視している．また，①での無益性中止を開発初期の試験で用いるならば，成功の見込めない薬剤を開発パスから篩い落とせるという意味で開発の成功率のアップに繋げることができる．

3) 開発コスト低減：

①の試験中止（有効性中止，無益性中止），②の治療群の中止は，試験へ登録される患者数が少なくなるため，それに付随する費用も低減させることができる．

4) 開発のスピードアップ：

①での有効性中止は，次試験の開始時期を早めることが可能であり，開発のスピード面で利点がある．⑦の第Ⅱ相と第Ⅲ相の結合は，第Ⅲ相試験の準備期間を省略できるという意味で開発期間を大幅に短縮できる．

上記のように，アダプティブデザインには大きな魅力があるが，その適用にあたって，「科学的適切性」への配慮が必要である．それは，次の3つの側面からなる．

1) 試験の質の一貫性が保たれていること：

計画書・手順書の遵守状況，時期や施設，実施国を問わず一貫して，試験を遂行していることを指す．とくに，中間解析の前後間で試験の質の一貫性を主張できることが重要である．

2) 中間結果が秘匿されていること：

意図的か非意図的かを問わず，中間解析の結果が試験関係者に漏洩し，治療，効果判定，解析，結果の解釈に何らかのバイアスを惹き起こしたのではないかという懸念がないことを表す．データの機密性を維持しバイアスを排除するためには，独立モニタリング委員会（試験に携わる関係者から独立して，試験の進行，安全性データや有効

性エンドポイントを評価し、試験の継続・変更・中止を提言する委員会）を設置することが適切である。

3) 第1種の過誤確率が制御できていること：

最終解析以外に中間解析を追加するため検定回数が複数になる。このことにより第1種の過誤確率（本来ならば効果が無いが誤って「効果あり」と判定してしまう確率）が事前に規定した有意水準を超えてしまい、当該試験の検証的妥当性を確保できなくなる。これを保持するには、統計手法により第1種の過誤確率を制御することが必要である。

これらを確保するためには、通常の固定デザイン（試験開始後に変更を行わないという意味で「固定」）が最適である。アダプティブデザインの多くで、中間解析時に盲検性を一時的に解除する。このため、試験の質の一貫性の維持、中間結果の秘匿については十分な配慮が必要である。

私たちは現在、アダプティブデザインの実施体制の構築に取り組んでおり、最初に手掛けるアダプテーションとして表 1-1 の①にある「無益性中止」を選択した。その理由は、以下の通りである。

- 倫理的要求への配慮：「無益性中止」の場合、効果の期待できない薬剤の使用を最小限に留めることができる。
- 第1種の過誤確率の制御：中間解析において無益性を評価した場合、最終解析で多重性を調整しない解析を実施したとしても第1種の過誤確率が増大しない。このため、無益性が否定されず試験を継続した場合においても、最終解析で有意水準を調整する必要がない。
- 規制当局の受け入れ可能性：ICH (International Conference on Harmonisation of Technical Requirements for Registration of Pharmaceuticals for Human Use, 日米 EU 医薬品規制調和国際会議) によるガイドライン「臨床試験のための統計的原則」では、各国の規制当局が群逐次デザインでの無益性中止が受け入れ可能であることを示しているが、第1種の過誤が制御される方法であれば群逐次デザインでなくても、無益性中止は受け入れ可能であると判断した。
- 付随するオペレーションが最小限：「無益性中止」の判断が下された場合、医療機関や登録センターへの試験中止の連絡が必要であるが、症例数の追加時のような薬剤の追加搬入、登録患者数の追加契約などのオペレーションが不要である。
- 開発の効率化：開発成功の見込めない薬剤を開発パスから篩い落とせるという意味で開発の成功率アップに繋げることができる。また、割り付ける患者数が少なくなるため、それに付随する費用も低減させることができる。

3. 無益性中止のアダプティブデザイン

3.1 無益性中止の方法

ここでは、臨床試験の各中間解析で無益性の判定を行うための統計的方法である、確率的打ち切り検定に着目した。確率的打ち切り検定では、計画した終了時点まで試験が継続したときに、肯定的または否定的な治療効果が観測される確率を算出し、無益性の判定を行う。この確率的打ち切り検定のうち、頻度流の条件付き検出力法、頻度流にベイズ流的要素を含めた予測検出力法を紹介する。ここでは、応答が正規分布に従うとし、共変量調整を行わない2群比較（各群で例数が等しい場合）を仮定する。また、無益性の判定を行う中間解析の回数は1回とする。

3.1.1 条件付き検出力に基づく無益性中止の方法

群1と群2の応答変数をそれぞれ Y_{1i} , Y_{2i} ($i=1, \dots, n, n+1, \dots, N$) とし, $Y_{1i} \sim N(\mu + \delta, \sigma^2)$, $Y_{2i} \sim N(\mu, \sigma^2)$ と仮定する。ここに、 δ は真の群間差、 σ は真の両群で共通の標準偏差とする。そして、中間解析時の各群の例数を n 例とし、最終解析時の各群の例数を N 例とする。

中間解析時、群間差の推定値 $\hat{\delta}_n$ と両群で共通の標準偏差の推定値 $\hat{\sigma}_n$ が得られているとする。ここでは、中間解析までに集積される例数の $2n$ は十分に大きく、標準偏差の推定値を真値と見なすことができるものとする。すなわち $\sigma = \hat{\sigma}_n$ と仮定する。このとき、中間解析時の統計量 $Z_n = \hat{\delta}_n / \sqrt{2\sigma^2/n}$ は標準正規分布に従う。また、試験終了時、両群で共通の標準偏差の推定値 $\hat{\sigma}_N$ についても $\sigma = \hat{\sigma}_N$ と仮定したとき、試験終了時の検定統計量 $Z_N = \hat{\delta}_N / \sqrt{2\sigma^2/N}$ も帰無仮説の下で標準正規分布に従う。ここに、 $\hat{\delta}_N$ は試験終了時の群間差の推定値である。このとき、中間解析での検定統計量 Z_n が与えられたという条件のもとで、試験終了時の対応する検定統計量 Z_N が標準正規分布の下側 $100(1-\alpha)$ パーセント点 $z_{1-\alpha}$ (α は片側有意水準) よりも大きくなる確率を、 $\Pr(Z_N > z_{1-\alpha} | Z_n)$ と表記する。これを条件付き検出力とよぶ。このとき試験を無益性中止とする条件は、 $\Pr(Z_N > z_{1-\alpha} | Z_n) < 1-\gamma$ とする。ここに、 γ は無益性の指標であり、一般に 0.8 から 1 の間の値に設定される。例えば、 γ を 0.8 と設定した時、条件付き検出力が 20%未満となった時に試験を中止することになる。

Lan, Simon and Halperin (1982) によって提案された LSH 法は、臨床試験計画時に想定した群間差 δ_p 、想定した両群で共通の標準偏差 σ_p に基づいて、最終時点における条件付き検出力を算出し、無益性中止の判定を行う。LSH 法による条件付き検出力は

$$P_n(\delta) = \Pr(Z_N > z_{1-\alpha} | Z_n, \delta_p, \sigma_p) = \Phi\left(\frac{\sigma_p \sqrt{n} Z_n + \delta_p (N-n) / \sqrt{2} - \sigma_p \sqrt{N} z_{1-\alpha}}{\sigma_p \sqrt{N-n}}\right) \quad (1)$$

で与えられる。ここに $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数を表す。

LSH 法は、臨床試験計画時に設定したパラメータを用いて条件付き検出力を算出するので、信頼できる中止基準にならない場合がある。例えば、真の群間差 δ が計画時に設定し

た群間差 δ_p より小さい場合には、条件付き検出力は過大に算出され、中間時に観測された群間差が小さいにもかかわらず無益性が判定されにくくなる。そこで、Pepe and Anderson (1992) 及び Betensky (1997) は中間解析時の群間差の推定値を用いて条件付き検出力を算出する方法を提案した。具体的には、 $\sigma = \hat{\sigma}_n$ のもとで LSH 法における臨床試験計画時の群間差 δ_p を $\hat{\delta}_n + c \times SE(\hat{\delta}_n)$ で置き換える。ここに、 c は停止境界の形状を決定する正值の係数である。その結果、Pepe and Anderson 法 (以下、PA 法) 及び Betensky 法 (以下、B 法) による条件付き検出力は

$$P_n = \Phi \left(\frac{\sqrt{n}Z_n + (Z_n + c)(N - n)/\sqrt{n} - \sqrt{N}z_{1-\alpha}}{\sqrt{N - n}} \right) \quad (2)$$

となる。PA 法では $c=1$ 、B 法では $c=2.326$ がそれぞれ与えられる。 c の値が大きい B 法の方が PA 法よりも楽観的な条件付き検出力を与えることになる。

3.1.2 予測検出力に基づく無益性中止の方法

条件付き検出力法では、計画時に立てた対立仮説で設定された、または中間解析で推定された群間差と標準誤差にもとづき、条件付き検出力を算出し無益性を判定する。このうち、中間解析時の推定値を用いる Pepe-Anderson-Betensky の方法では、既に観測された群間差とその標準誤差で将来の群間差を予測することになるが、将来のデータに関する予測誤差が考慮されていない点に限界がある。そこで、ベイズ流の方法を用いて得られる、中間解析時のデータが与えられたもとの治療効果の事後分布に基づく条件付き検出力関数の期待値を求め、これにより無益性の判定を行う予測検出力法 (Predictive Power) (以下、PP 法) が提案されている。条件付き検出力という頻度流の考えを基本とする中で、ベイズ流に群間差の事後分布を用いていることから、PP 法はベイズ流と頻度流の混合法と呼ばれている。

PP 法で用いる予測検出力は、

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\delta) f(\delta | Z_n) d\delta$$

で与えられる。ここに、 $P_n(\delta)$ は条件付き検出力関数、 $f(\delta | Z_n)$ は中間解析時点までに観測されたデータが与えられたもとの群間差 δ の事後分布の確率密度関数である。つまり、この判定基準は群間差 δ の事後分布についての条件付き検出力の期待値と解釈できる。これを予測検出力とよぶ。事前に規定した無益性の指標 γ に対して、この予測検出力が $1-\gamma$ よりも小さければ治療は無益であると判定し、試験は中止される。

3.1.1 節と同様に、群 1 と群 2 の応答変数をそれぞれ Y_{1i}, Y_{2i} ($i=1, \dots, n, n+1, \dots, N$) とする。また $Y_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ と仮定する。さらに、ベイズ流に各群の平均値 μ_1, μ_2 それぞれの事前分布として、 $\mu_1 \sim N(\mu_1^*, \sigma^{*2})$, $\mu_2 \sim N(\mu_2^*, \sigma^{*2})$ を与える。このとき、各群 n 例の患者が試験を完了した時点の予測検出力は、Dmitrienko and Wang (2004) より

$$P_n = \Phi \left(\frac{\sqrt{N}Z_n(1+a_n) + b_n/\sigma - \sqrt{n}z_{1-\alpha}}{\sqrt{\frac{N-n}{N}[(N-n)(1-c_n) + n]}} \right) \quad (3)$$

である。ただし、

$$a_n = \frac{n-N}{N} + \frac{N-n}{N} \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^2 \right)^{-1}, \quad b_n = \sqrt{\frac{n}{2N}} (N-n) (\mu_1^* - \mu_2^*) \left(1 + n \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^2 \right)^{-1}, \quad c_n = \left(1 + n \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^2 \right)^{-1}$$

とする。なお、 σ は計画時の想定値を用いる。また、 σ^* が無大に近づく μ_1, μ_2 それぞれの事前分布は変則 (improper) 一様分布となり、事後分布は事前分布の影響を受け難くなる。

(3)式において $\sigma^* \rightarrow \infty$ とすると、予測検出力は

$$P_n = \Phi \left(\frac{\sqrt{N} Z_n - \sqrt{n} z_{1-\alpha}}{\sqrt{N-n}} \right) \quad (4)$$

と表せる。以降、本稿では μ_1, μ_2 それぞれの事前分布は一様分布であると仮定し、予測検出力とは(4)式を指すものとする。

3.2 無益性中止の各方法の性能評価

3.1 節で紹介した無益性中止の各方法を、実際に臨床試験の現場で適用する場面を考慮したとき、次の課題が挙げられた。一つは、条件付き検出力法では無益性判定基準の指標である $1-\gamma$ の値として 10%、あるいは 20%と設定している論文が見られた (Robert (2007), David (2009))。これに対し、予測検出力法では $1-\gamma$ をどの程度に設定すべきかが不明であった。もう一つは、無益性中止のアダプティブデザインを実施する場面を想定したとき、「中間解析時に薬効差が負である場合 (例えば、プラセボに対して試験薬が数値的に劣っていた場合) には試験薬が無益であるとみなし、無益性中止と判断すべきである」という考え方 (Wieand (1994)) (以下、薬効差マイナス法と呼ぶ) があり、これは臨床現場でも受け入れられ易い基準であると考えられた。そこで、この薬効差マイナス法の判断基準が条件付き検出力法や予測検出力法とどのような関係にあるのかを検討する必要があると考えられた。

これらの課題に対し、各方法の関係と性能を評価するため、以下の2つの検討を行った。まず中間解析で推定された薬効差と各方法の指標の関係性を図示し、中間解析時の薬効差が負であった場合に各方法で対応する無益性中止の基準を検討した。次に各方法について、帰無仮説および対立仮説それぞれの下で中間解析時に無益性中止と判定される割合および最終解析まで到達し有意な差が検出される割合をシミュレーションによって評価し、方法間での比較を行った。

3.2.1 薬効差の推定値と各無益性中止指標の関係

まず、薬効差の推定値と各無益性中止指標の関係性を図示し、中間解析時の薬効差が負であった場合に各方法で対応する無益性中止基準を検討した。薬効差 $\delta = 0.4$ 、標準偏差 $\sigma = 1.0$ を仮定し、片側有意水準 0.025、検出力 80% の下で必要症例数が $N = 100$ 例/群と算出される。中間解析時まで集積された患者の割合が目標例数の 30%, 50%, 70% となる3通りの時点で1回のみ中間解析を実施する場合を想定した。このとき、中間解析時の薬効差の推定値 $\hat{\delta}_n$ を横軸に、(1), (2), (4)式で算出される各無益性中止指標の値を縦軸にとった。

これを図 3-1 に示す．図中には参照線として，無益性中止指標が 5%，20%を表す水平線と，薬効差の推定値が 0 を表す垂直線を記載している．

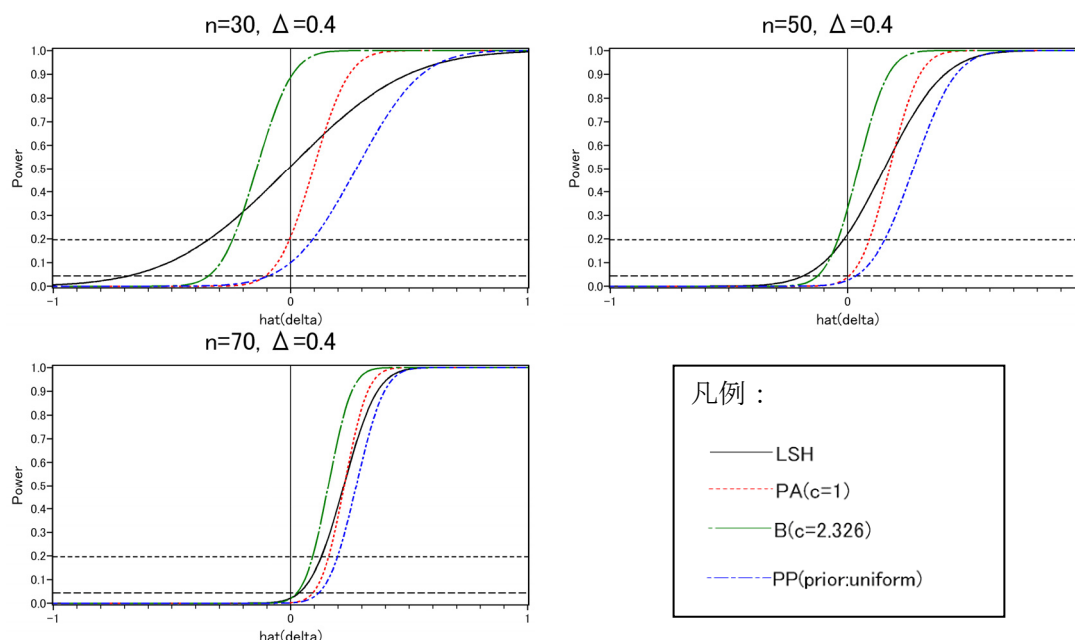


図 3-1 薬効差の推定値と各無益性中止指標の関係：中間解析時点 30%, 50%, 70%

図 3-1 における中間解析時点 50%での図に着目すると，LSH 法の条件付き検出力が 20%を下回れば中間解析時点の薬効差の推定値が負の値となっていた．また PP 法の予測検出力が 5%を下回った場合，中間解析時点の薬効差の推定値がほぼ負となる関係にあることが確認できた．すなわち，無益性の判定基準 $1-\gamma$ の値を LSH 法では 20%，PP 法では 5%とすることが，薬効差マイナス法に対応することが確認できた．一方，B 法の条件付き検出力は 30%強となって初めて薬効差の推定値が 0 となっていた．すなわち，B 法の条件付き検出力は 20%よりも大きい基準でないと，薬効差マイナス法には対応しないことが確認された．また，PA 法の条件付き検出力が 20%であるとき，中間解析時の薬効差の推定値は約 0.1 となっており，PA 法で無益性の判定基準 $1-\gamma$ の値を 20%としたときは薬効差の推定値が 0 を少し上回る場合でも無益性の判定がなされることが確認された．

中間解析時点 30%の場合は，無益性中止の判定方法によって各指標と薬効差の推定値の関係は大きく異なっていた．条件付き検出力法では，条件付き検出力の値が PA 法では 20%以下，LSH 法では 50%以下，B 法では 90%以下で薬効差の推定値が負となっていた．また PP 法では予測検出力の値が約 10%以下であれば薬効差の推定値が負となる関係性が確認された．中間解析時点 70%の場合は，全ての方法で指標が 20%を下回った場合，薬効差の推定値は負になるという関係にあった．

次に薬効差 δ を 0.2, 0.4, 0.6 の 3 通りとし，中間解析時点の薬効差の推定値と各無益性中止指標の関係を図示した．各 δ に対して最終解析時点の 1 群あたりの必要症例数 N を算出した

結果, 394 例, 100 例, 45 例であったが, 中間解析時点は全て 50% に固定した. ここで標準偏差を 1.0 としていることから, $\Delta = \delta / \sigma$ で計算される効果サイズと薬効差は等しくなる.

図 3-2 に結果を示す. 中間解析時の薬効差が 0 となる箇所に着目すると, 各方法における指標の値は効果サイズ Δ の変動にはほとんど影響を受けないことが確認された.

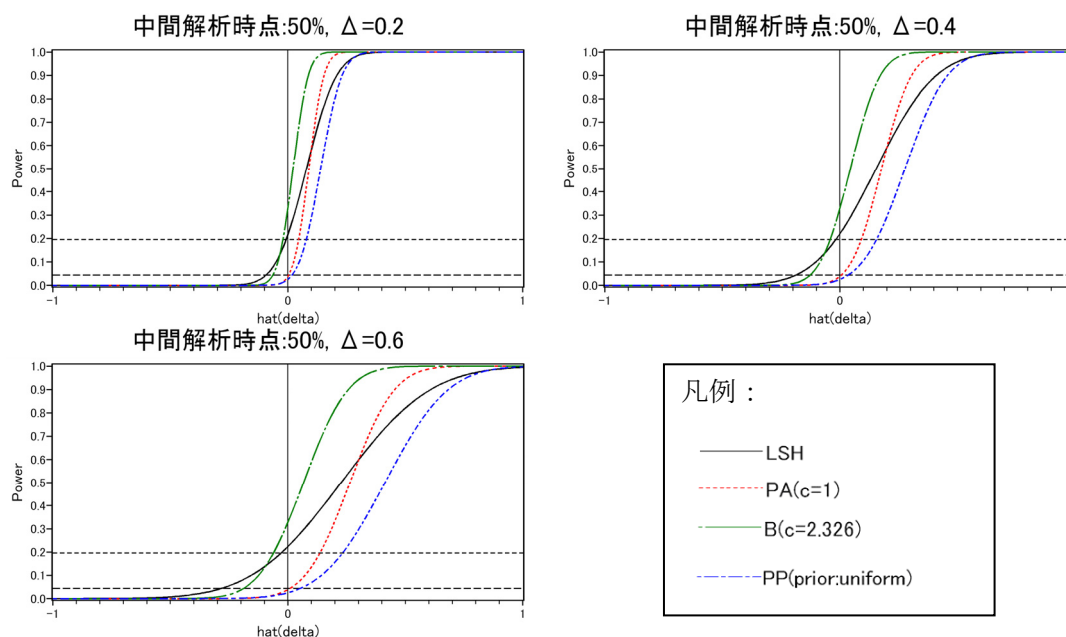


図 3-2 薬効差の推定値と各無益性中止指標の関係 : 効果サイズ $\Delta = (0.2, 0.4, 0.6)$

3.2.2 無益性中止のシミュレーション

LSH 法, PA 法, B 法, PP 法, 及び薬効差マイナス法について, 帰無仮説および対立仮説それぞれのもとで, 中間解析時に無益性中止と判定される割合および最終解析まで到達し有意な差が検出される割合をシミュレーションで評価した. 設定したシミュレーションの仮定は以下の通りである.

- 帰無仮説 $H_0: \delta = 0$, 対立仮説 $H_1: \delta = 0.4$
- 有意水準 : 片側 0.025, 検出力 : 80%
- 必要症例数 : $N = 100$ 例/群 (2 群間の薬効差を 0.4, 共通の標準偏差を 1.0 と仮定し, 上記の有意水準, 検出力に基づき算出した)
- 中間解析時点 : 集積された患者の割合が目標症例数の 30%, 50%, 70% となる 3 通り
- 中間解析回数 : 1 回
- 無益性の判定基準 $1 - \gamma$: LSH 法, PA 法, B 法では 20%, PP 法では 5%
- シミュレーション回数 : 5,000 回

これらの仮定の下で, 試験薬群では $N(\delta, 1.0^2)$, プラセボ群では $N(0.0, 1.0^2)$ に従う乱数を発生させ, 中間解析時と最終解析時に Student の t 検定を実施し, 中間解析時に無益性中止と判定される割合および最終解析まで到達し有意な差が検出される割合を算出し

た．結果を表 3-1 に示した．

表 3-1 各方法における無益性中止の性能評価のシミュレーション結果

			中間解析の時点		
			30 %	50 %	70 %
帰無 仮説	LSH 法	無益性中止の割合	9.90 %	48.40 %	79.30 %
		第 1 種の過誤確率	2.40 %	2.32 %	2.36 %
	PA 法	無益性中止の割合	50.10 %	68.30 %	83.90 %
		第 1 種の過誤確率	2.16 %	2.22 %	2.30 %
	B 法	無益性中止の割合	18.10 %	43.20 %	72.00 %
		第 1 種の過誤確率	2.38 %	2.36 %	2.40 %
	PP 法	無益性中止の割合	38.70 %	59.90 %	78.20 %
		第 1 種の過誤確率	2.32 %	2.30 %	2.36 %
対立 仮説	薬効差マイナス法	無益性中止の割合	50.40 %	51.20 %	51.40 %
		第 1 種の過誤確率	2.16 %	2.30 %	2.40 %
	LSH 法	無益性中止の割合	0.20 %	2.10 %	5.50 %
		検出力	80.00 %	79.80 %	79.60 %
	PA 法	無益性中止の割合	6.30 %	6.40 %	8.30 %
		検出力	77.60 %	78.50 %	78.90 %
	B 法	無益性中止の割合	0.80 %	1.70 %	3.40 %
		検出力	79.90 %	79.80 %	79.90 %
	PP 法	無益性中止の割合	3.40 %	3.80 %	5.10 %
		検出力	79.20 %	79.40 %	79.60 %
	薬効差マイナス法	無益性中止の割合	6.50 %	2.50 %	1.20 %
		検出力	77.60 %	79.70 %	80.00 %

PA 法は，他の方法と比較して中間解析時に無益性中止する割合が高い傾向がみられた．また，PA 法における第 1 種の過誤確率と，検出力は，他の方法と比較して低い傾向にあった．しかし，その差は僅かであった．

帰無仮説の下での無益性中止は，真に無益な薬剤を試験の途中で中止することを意味し，その割合は集積された患者の割合が目標例数の 50% で中間解析を行った場合に着目すると，B 法で最も低く，次いで LSH 法，薬効差マイナス法，PP 法，PA 法の順に高くなっていた．対立仮説下での無益性中止の割合についての各方法間での大小関係は，帰無仮説下での大小関係と同じであった．

また帰無仮説の下での第 1 種の過誤確率と，対立仮説下での最終解析時の検出力は，LSH 法，B 法，PP 法，薬効差マイナス法でほぼ等しくなることが確認された．

4. まとめ

今回の検討により，以下の点を確認することができた．

- 50% 時点で中間解析を実施する際には，無益性の判定基準 $1 - \gamma$ の値を LSH 法で 20%，PP 法で 5% とすれば，解釈が容易な薬効差マイナス法と同等の判定を行える．
- PP 法は中間解析時点に大きく依存することなく，帰無仮説の下で無益な薬剤を正し

く無益性中止する確率が高く、一方で対立仮説の下では誤って無益性中止してしまう確率を低く抑えることができる方法である。

3.1.1 節で述べたように、LSH 法による条件付き検出力は、臨床試験計画時に想定した薬効差に大きく影響を受けるため、薬効差の仮定が真の薬効差から大きく異なっている場合には無益性判定が正確に行えないという問題点がある。一方、PP 法では得られたデータに基づいて予測検出力を算出する。このため、計画時の薬効差の仮定に依存しない方法であると考えられた。以上の理由より、応答が正規分布に従う場合の無益性中止の方法として、私たちは PP 法を推奨したい。

さらに、中間解析の実施時期についての検討では、目標症例数の 30%, 50%, 70%いずれかの時点で中間解析を実施する場合を考えたが、中間解析を一度だけ実施して無益性判定を行う際、中間解析のタイミングを試験開始後早期に設定すると、集積されるデータが少ないため、薬効差の推定値の精度が低く、無益性の判断が下され難い。一方で中間解析のタイミングを試験後期に設定した場合、中間解析に着手してから無益性の判定結果が出されるまでの間に、症例の登録そのものが終了してしまう可能性もあり得る。したがって、中間解析は 50%付近で行うことが現実的であろうと考えられた。

今回の研究では、応答が連続型で正規分布に従う場合に限り検討を行ったが、今後は応答が生存時間型である場合に無益性中止の判定をどのように行えば良いかの検討を進めていきたいと考えている。また、今後アダプティブデザインを実際の臨床試験に適用していく際、真に無益な薬剤を無益性中止することを重視するか、真に有益な薬剤を無益中止しないことを重視するかは、対象疾患が生命を脅かすものかどうか、標準的な治療法が存在するか否かといった、患者や医療関係者の期待度によっても左右される。そこで無益性中止の適用にあたっては、医療環境の動向にも注意する必要があることを最後に述べておきたい。

参考文献

- [1] Betensky, R.A. (1997). Early stopping to accept H_0 based on conditional power: *Approximations and comparisons*. *Biometrics* 53, 794-806
- [2] David R. Spriggs et al.(2009). Phase III randomized trial of intravenous Cisplatin plus a 24- or 96-hour infusion of Paclitaxel in epithelial ovarian cancer: A Gynecologic Oncology Group Study. *Journal of Clinical Oncology*; 25: 4466-4471.
- [3] Dmitrienko A and Wang M. Bayesian predictive approach to interim monitoring in clinical trials. *Statistics in Medicine* 2006; 25: 2178-2195.
- [4] ICH E9 ガイドライン. http://c11bw1rt.securesites.net/ich/e/e9_98_11_30.pdf
- [5] Lan, K.K.G, Simon, R. and Halperin, M. (1982). Stochastically curtailed tests in long-term clinical trials. *Communications in Statistics. Sequential Analysis* 1, 207-219
- [6] Pepe, M.S. and Anderson, G.L. (1992). Two-stage experimental designs: Early stopping with a negative result. *Applied Statistics* 41, 181-190
- [7] Robert A. Harrington et al.(2007). Effect of Tilarginine acetate in patients with acute myocardial infarction and cardiogenic shock: The TRIUMPH Randomized Controlled Trial. *JAMA*. 298(9):972.
- [8] Wieand S, Schroeder G, O'Fallon JR.(1994). Stopping when the experimental regimen doses not appear to help. *Statistics in Medicine*, 13: 1453-1458.
- [9] 吉田祐樹, 勝田啓子, 竹内雅子, 渡辺秀章. 臨床試験で条件付き検出力を用いた無益性中止の方法の性能評価. (2010). 2010 年日本計量生物学会年会講演予稿集, 1-6.

遺伝統計学とゲノム応用の最前線

株式会社ステージン 遺伝統計解析事業部

上辻茂男 (kamitsuji@stagen.co.jp)

生物の設計図であるゲノム情報が観察可能となり、さまざまな生命の多様性を正確に説明することが可能となった。ゲノム情報の解析には遺伝統計学の理解が必要不可欠であるが、日本における遺伝統計学の専門家は少ない。本講演では、遺伝統計学について紹介し、ゲノム情報の観測・解析、さらに現在のゲノム研究の応用例について紹介する。遺伝統計学に興味をもつ統計学者が少しでも増えることを期待する。

1 遺伝統計学と数理統計学

遺伝統計学 (statistical genetics, 統計遺伝学と訳されることも多い) は生物の継承 (heredity) と多様性 (variation) を説明するための学問である。ちなみに Genetics という言葉は 1905 年に Bateson が友人に宛てた手紙の中で使った造語であり、heredity と variation の概念を融合したものを指した。日本語では単に「遺伝」と訳すことが多いが、日本人にとって遺伝は「heredity」の意味合いが強く、しばしば混乱を与える。遺伝統計学において因果は明確である。原因は世代から世代へと安定して継承される対象物「アレル (allele)」であり、父と母から 1 つずつのアレルを継承され、そのアレルの組み合わせである遺伝型 (genotype) によって表現型 (phenotype) がきまる。そして原因の継承から表現型まで、遺伝継承法則 (laws of inheritance) によって支配されると考える。遺伝継承法則はメンデルの 3 法則と、そのうちの 1 つの独立の法則の例外である連鎖の法則からなる。遺伝統計学に基づいた解析は、これまで数多くの知識をもたらし、特にメンデル型遺伝病といわれる遺伝型との関連性が非常に強い形質 (trait、目的変量に相当する。形質の観測値が表現型である) については、その原因の 99%以上を特定したといわれる。

しかしながら遺伝統計学が重要視されたのは最近である。これは 1970 年代まで原因となる遺伝型の観測が困難であったからだ。それまでの遺伝統計学は「アレルが存在するであろう」との予想の下で考えられてきた。そのため、実データを観測し、その観測データから背後に潜むモデルを推測する生物計測学 (Biometrics) の方が優勢であった。生物計測学は Galton や Pearson K を中心に研究され、その研究による産物は線形回帰モデルやカイ 2 乗検定法など近代統計学の礎となった。生物計測学はデータから挙動を探るモデル構築が目的であり、一方、遺伝統計学は遺伝継承法則というモデルに従うデータを探す。両者は真逆の概念であり、しばしばこれら 2 つの学派は対立した。

現在のゲノム研究では遺伝統計学だけでなく生物計測学も重要視する。近年興味のある形質は、遺伝的要因だけでなく環境的要因も影響するものが多い。たとえば生活習慣病などは遺伝的要因だけでなく、年齢や食生活などが影響することは明らかである。そのため、遺伝型で説明される部分は遺伝継承法則を当てはめ、その他の環境要因は統計モデルを導入して、形質の挙動を説明することが多い。

2 多型データの観測

個体は父と母から 1 つずつ配偶子を継承し、22 対の常染色体と 1 対の性染色体からなる。これらには 30

億の A, T, G, C の塩基 (nucleotide) のペアが存在する。この中の 0.1%未満の座位 (locus、複数形は loci、正確な記述ではないが、塩基が存在する場所と考えてよい) では、個体によって存在するアレルが異なり、この多様性を遺伝的多型 (polymorphism) と呼び、特に 1 つの塩基が存在する座位で、多型が生じる座位を SNP (single nucleotide polymorphism、スニップと呼ばれることが多い) 座位と呼ぶ。現在では SNP 座位を対象としたゲノム研究が多く行われている。特に約 1,000 万個の SNP のうち数万から約 100 万 SNP 座位を一度に観測することが可能な DNA チップが開発されており、世界中の研究者が遺伝型を観測できる環境が整っている。

さらに数年前には 1 個体の全ゲノム配列を観測する次世代シーケンサ (Next Generation Sequencer, NGS, Massively Parallel Sequencer と呼ばれることもある) が登場した。1 個体あたり 10 万円以下で全ゲノム配列を読むことを目標としたプロジェクトも存在する (\$1,000 Genome Project)。観測精度や莫大なデータのハンドリングに問題を抱えるが、全ゲノム配列を観測できればさらに多くの情報を用いたゲノム研究が可能となるであろう。最近はある特定の表現型をもつ 1 個体の全ゲノム配列を観測し、一般集団では存在頻度の小さい遺伝型を見つけることによって、原因を特定する研究が流行っている (まだ 1 個体あたりの観測にコストと時間がかかるため)。

3 ゲノムワイド関連研究

染色体上に存在する多量の遺伝多型座位について、網羅的にその遺伝型を観測し、形質との関連性を探る研究をゲノムワイド関連研究 (Genome-Wide Association Study, GWAS、ジークス or ジーバスと呼ばれる) と呼ぶ。先にも述べたが、現在では多量の SNP 座位の遺伝型を一度に観測する DNA チップを用いた研究が主流である。GWAS では、病気の発症の有無のような質的形質や生化学データのような量的形質と、DNA チップで観測された多量の SNP 座位のうち、遺伝型と形質の間に遺伝継承法則が有意に成立する SNP 座位を探し出す。形質を目的変量とし、多量の SNP 座位を説明変量として遺伝継承法則に基づき解析することが理想であるが、観測個体数は多くても数万個体のため、パラメータの推定は難しい。そこで GWAS では 1 つの座位に注目し、形質との関連性を検討することを座位数分繰り返す手法がとられる。最近では、生活習慣病のような環境要因に大きく依存する形質を扱う場合には、遺伝型には遺伝継承法則、環境要因には線形回帰モデルや一般化線形モデルを導入し、形質との関連性を遺伝的要因と環境的要因に分けて説明することも多い (Fisher RA の提唱した相加的ポリジーンモデル)。

この GWAS は 2003 年に日本の理化学研究所が世界で初めて行った。そして、SNP 座位の場所の特定 (HapMap プロジェクト)、DNA チップの技術が確立して 2005 年頃から世界中で行われるようになった。今では Nature や Nature Genetics などの雑誌では必ず GWAS の結果を見かけるまでになった。しかしながら GWAS の研究報告には誤りも非常に多い。1 つの問題はタイプ I の誤りの多重性である。通常 GWAS で見つかる関連 SNP 座位は 100 万 SNP 座位のうち数個である。そのため、統計的評価を行う際には多重比較 (multiple comparison) の概念を利用する。また DNA チップによる遺伝型の観測は、化学的特徴上、ランダムに遺伝型を誤ることは少なく、ある傾向をもって誤るため関連性があるように見えてしまう。そのため、DNA チップの構造はもちろんのこと、遺伝学や生物学を理解して解析を行わなければならない。これらの知識をもって、解析前にデータを浄化することが必要である。臨床研究の背景や生物学、医学、遺伝学に基づいて、観測された多型データをクリーニングしなければ正しい結果を見つけ出すことはできない。さらに、解析対象となる座位が多量であるのに対して、解析対象集団は

少ないため十分な検出力をもった研究ができない場合が多い。ゲノム研究を実施する際には、検出力シミュレーションを行い、計画する研究の妥当性を事前に評価することが重要との認識が高くなってきた。現在、ゲノム研究を行う際には必ず統計学者を研究プロジェクトに加えることが浸透しつつある。統計的に研究を計画し、解析および解析結果の解釈、さらに結果を正しく発表・公開することが重要であり、ゲノム研究における統計学者の需要は高い。

4 ゲノム研究の応用

ゲノム研究は人だけでなく様々な生物に応用にされている。

4.1 PGx 研究

薬剤の安全性や有効性は、個人によってその結果は多様である。ある薬剤を服用することによって、稀な割合であるが副作用を発症する場合がある。薬剤服用による副作用発症は、薬剤の開発段階である治験では予測できない場合が多い。それは副作用発症の割合が非常に小さいこと、また治験における観察対象のサンプルサイズが小さいことが主な理由である。つまり、少ないサンプルでは副作用発症者を観測することができないからである。また、副作用発症の原因を生化学データで予測することも難しい。生化学データは環境に起因するものが多く、データの確実性としてはゲノムデータほど高くない。

ファーマコゲノミクス (Pharmacogenomics) 研究はゲノム情報を用いた薬剤にかかわる研究全体を指す。もともとアレルが観測される前から薬剤との関連性について研究されており、それを薬理遺伝学 (Pharmacogenetics) と呼んだ。これら 2 つの研究を合わせて近年では PGx 研究と呼ぶ。薬剤服用による安全性や有効性が個体によって多様であり、その原因が遺伝的多様性にあると考え、その遺伝的要因を探索する研究である。多くの場合は候補遺伝子研究 (candidate gene approach) という GWAS とは対称的な方法で行われる。生物学、医学的に関連性が見込まれる座位を絞り込み、それら特定の座位についてのみ関連性を議論するものである。PGx 研究によって薬剤の副作用発症の確率を予測することが可能となり、個体の遺伝多型によって薬剤の処方を選択するオーダーメイド医療 (personalized medicine) も実際に行われている。

ただし先述したが、治験においてサンプルサイズは非常に小さい。また副作用を発症した個体を収集しても、数十人に満たない場合も多い。そのため研究の検出力が問題となる。確かに、PGx 研究における遺伝的要因の形質に対する関連性の強さは大きいですが、サンプルサイズの小ささは深刻な問題である。そこで 1 つの回避方法として、比較対称群のサンプルサイズを増やすことが考えられる。現在は健康な個体を集め、複数の製薬企業が共通して使用可能な多型データを収集するコンソーシアムが生まれている (日本 PGx データサイエンスコンソーシアム、JPDSC)。

4.2 畜産動物への応用

DNA チップは人だけでなく様々な動物についても開発されている。たとえば薬剤の開発における動物実験ではマウスや犬を用いることが多く、これら試験動物の多型データを DNA チップを用いて観測し、化合物に対する反応性についてゲノム研究を行っている。

また人間社会に重要な畜産動物についての DNA チップも開発されている。社会的問題となった畜産動物に関する問題として産地偽装がある。たとえば沖縄アグーブランド豚は、沖縄県が把握している出荷量よりはるかに多い量が流通している。そこで沖縄アグーブランド豚の多型情報を観測することによって、その遺伝的類似性からブランド判別の研究が行われている。

5 遺伝統計学に関する参考文献

ゲノム情報は生物の設計図であり、非常に安定して世代へ伝わることから、確実性の高い情報である。しかしながらそのデータ量は膨大であり、その中から真なる情報を導くためには統計学を理解したゲノム研究者が必要不可欠である。本講演で少しでも遺伝統計学に興味をもっていただければ幸いである。最後に遺伝統計学の参考書をいくつか挙げておく。

遺伝統計学の入門書（読み物的）

鎌谷直之（2009）オンリーワン・ゲノム—今こそ『遺伝と多様性』を知ろう、星の環会。

上辻茂男（2008）遺伝統計学へようこそ、BTJ ジャーナル（計 15 回連載）。15 回分の連載が総集編として無料ダウンロード可。 <http://biotech.nikkeibp.co.jp/btjin/#btjj0905>

遺伝統計学の教科書（統計学の知識がある方へ）

Ott J (1999) Analysis of Human Genetic Linkage, 3rd edition, The Johns Hopkins University Press.

鎌谷直之（2007）遺伝統計学入門、岩波書店。

遺伝統計解析のソフトウェアについて


Genetic Analysis Software, <http://www.nslj-genetics.org/soft/>, <http://linkage.rockefeller.edu/soft/>

統計モデルによる現象の解析, 並びに, その基礎理論

遺伝統計学とゲノム応用の最前線

上辻茂男
Shigeo Kamitsuji, PhD
株式会社スタージェン 遺伝統計解析事業部

日時: 平成22年10月21 日(木) ~10月23日(土)
場所: 山形テルサ 研修室A
世話人: 加藤 剛 先生 (山形大学)



統計学は遺伝学から始まった

生物計測学派 **大喧嘩** メンデル学派

計測されたデータから
遺伝的要因と形質の関係を探る

遺伝的要因と形質の間では
メンデルの法則が成立している


C リンネ, 18世紀
生物分類学


CR ダーウィン, 1859
ダーウィンの進化論


W ウェルダン, 19世紀
動物学者


G メンデル, 19世紀
メンデルの法則


W ベートソン, 20世紀
Geneticsを提唱


F ゴールトン, 20世紀
回帰



K ピアソン, 20世紀
相関係数, カイ2乗検定


W ヨハンセン, 20世紀
Geneを命名


RA フィッシャー, 20世紀
仮説検定, 尤度

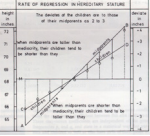
遺伝統計学に関する業績 生物計測学派

Francis Galton (1822 – 1911)




- ダーウィンのいとこ
- ナイチンゲールと親戚関係
- 様々なものを計測して関連性を調べる

回帰 (Regression)



子の身長と両親の平均身長との関係を示すゴールトンの図

Karl Pearson (1857 – 1936)




- 数学に真実を求め、現実世界にあてはめようとした
- 数学的能力に長けていた

現代の数理統計学の基礎を築いた1人

- ピアソンの相関係数
- ピアソンの χ^2 乗検定
- モーメント生成関数やモーメントの概念
- 異なる分布の間の関係と確率密度関数、分布関数
- Biometrika, Ann Hum Genetの創始者の一人

遺伝統計学に関する業績 メンデル学派

Gregor Johann Mendel (1822 – 1884)



- メンデルの法則
- 分離の法則
- 独立の法則
- 優劣の法則


メンデルの法則の再発見

- 1901年, ドブリスの突然変異
- 1902年, サットンとワットの染色体説
- 1902年, ガローのアルカプトン尿症の遺伝形式

連鎖の法則

- 1908年, ベイトソン
- スイトビーで独立法則の例外を発見
- 1910年, モルガン
- ショウジョウバエの唾液腺の染色体の観察と交配実験により、形質と染色体の一を対応させ、染色体地図を作成

Sir Ronald Aylmer Fisher (1890 – 1962)



Modern synthesis

数理的に統合


- ダーウィンの進化説
- メンデルの遺伝継承法則
- 突然変異 (mutation)
- 個体間の多様性 (variation): 生物計測学の概念

現代の数理統計学の基礎を築いた1人

- 分散の概念、分散分析
- 中心極限定理
- 仮説検定、フィッシャーの正確検定
- ランダム化の重要性
- 連鎖解析
- 相対的ポリジーンモデル

学派の衝突

生物計測学派



K ピアソン
証明無しに正しい法則はない


息子
Egon Sharpe Pearson

数学者
Jerzy Neyman

最強検定
信頼区間

Department of Statistics in UC Berkeley
1938年にBerkeleyに移り、UCBに統計学部を設立

メンデル学派



RA フィッシャー
メンデルの法則は正しい

Galton Professors of Eugenics

- K Pearson 1904-1934
- RA Fisher 1934-? (World War II)
- L Penrose 1945-1965

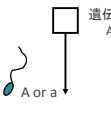
日本の統計学の原点
戦後伝わった統計学は数理統計学

GHQ

遺伝継承法則

アレルを対象とした原因と結果との間の確率モデル

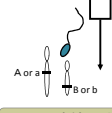
分離の法則



遺伝子型 A/a

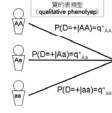
A or a

独立の法則



A or a, B or b

優劣の法則

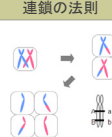


質的形質 (qualitative phenotype)
 $P(D=+|AA)=q_{AA}$
 $P(D=+|Aa)=q_{Aa}$
 $P(D=+|aa)=q_{aa}$

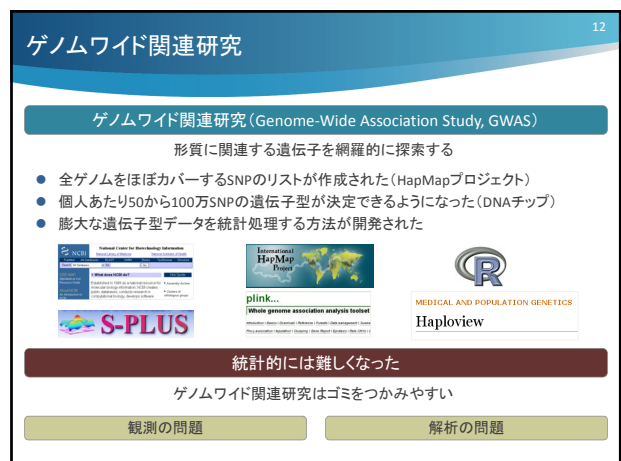
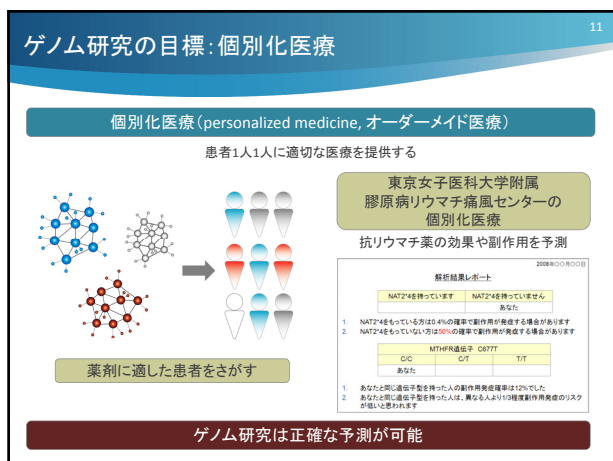
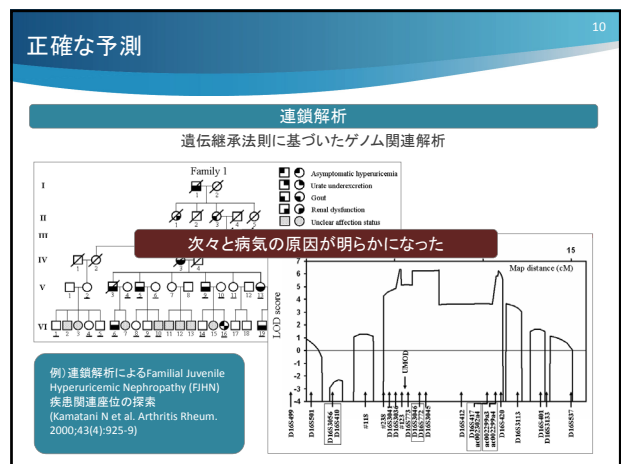
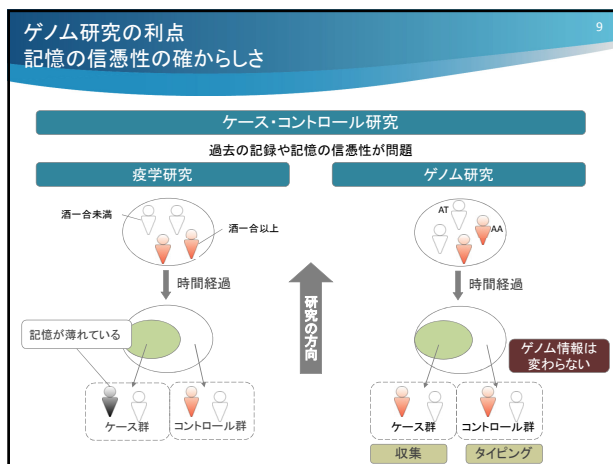
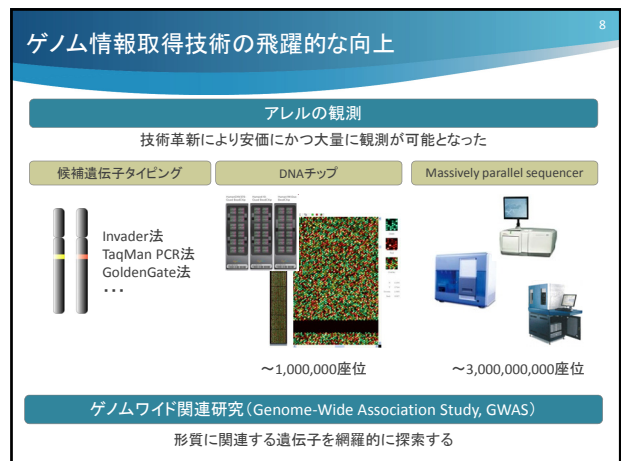
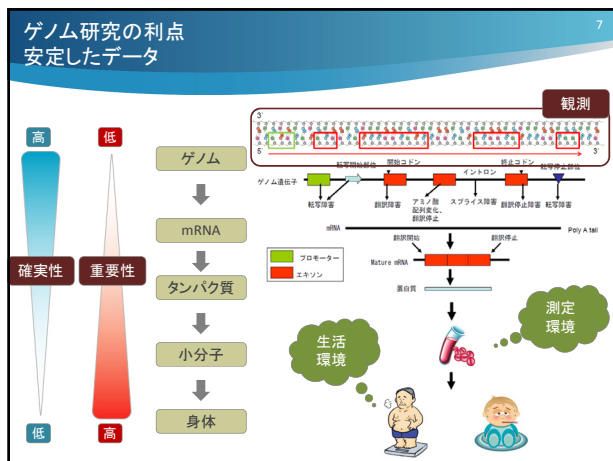
メンデルの3法則 + 連鎖の法則 (独立の法則の例外)

遺伝継承法則に基づき安定した確率で観測できる

連鎖の法則



量的形質 (quantitative phenotype)
 $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $X_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
 $X_{3i} \sim N(\mu_3, \sigma_3^2)$



情報が増えると誤りも増える

13

“偶然の関連性”を評価する機会が増える
タイプの誤りの多重性

nature
genetics

ANALYSIS

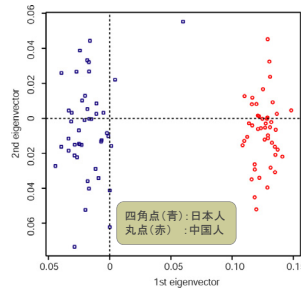
Systematic meta-analyses of Alzheimer disease genetic association studies: the AlzGene database

Lars Bertram¹, Matthew B McQueen^{2,3}, Kristina Mullin¹, Deborah Blacker^{2,4} & Rudolph E Tanzi¹
Conclusions
In this study, we have conducted the most comprehensive assessment of currently available data on the genetics of Alzheimer disease and, to the best of our knowledge, of data on any genetically complex disease. Based on the allele distributions of genetic variants with available data in at least three independent case-control samples, we systematically meta-analyzed 147 polymorphisms across 60 different putative Alzheimer disease risk genes, following recently suggested guidelines for the meta-analysis of genetic association data²⁰⁻²⁴ and its online curation²⁵. In addition to APOE-ε4 and four other probably ε4-related effects, we discovered 20 polymorphisms in 13 genes that yielded significant

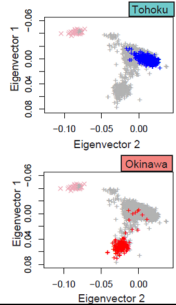
ゲノム情報は安定した有用な情報

14

HapMapDB



Yamaguchi-Kabata Y. et al.
Am J Hum Genet. 2008
Oct;83(4):445-56.



本日のお話

15

ゲノム研究と様々な分野への応用

遺伝統計学と現在のゲノム応用について紹介

1. 遺伝統計学について
 - ゲノム情報
 - ゲノム情報を用いた解析
2. ゲノム情報の応用
 - 人への応用
 - 家畜への応用

ちょっと宣伝

株式会社ステージン

- 遺伝統計学の基づいた受託解析
- 遺伝統計学教育
- ゲノム研究のコンサルテーション
- ゲノム研究に必要なシステム構築

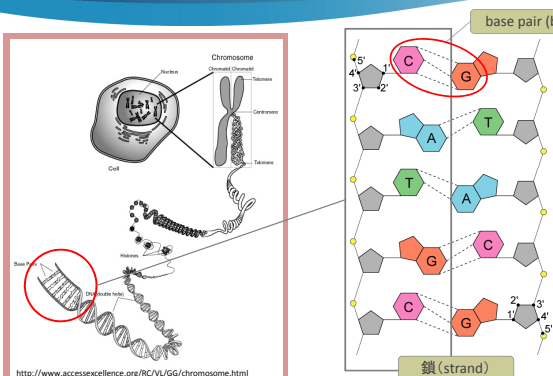
<http://www.stagen.co.jp/>

I ゲノム情報を用いた解析手法

1. ゲノム情報
2. ゲノム情報と形質の関連解析

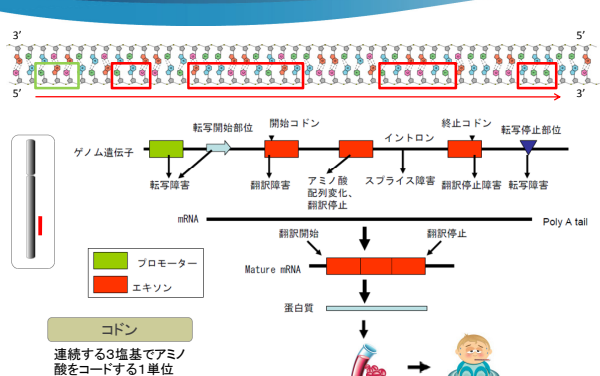
染色体の螺旋構造

17



ゲノム配列とたんぱく質の合成

18



ゲノム配列とその変化

異なるたんぱく質が得られる

欠失

終止 Asp Arg 開始

ゲノム変異とSNP

ゲノム変異 (genomic variation)

由来の異なる配偶子も含めた集団内におけるゲノム配列の違い

SNP	STRP
一塩基置換 (single nucleotide polymorphism)	short tandem repeat polymorphism 2塩基から5塩基の繰り返し
AATAGTGAG AATAGCTGAG	繰り返し数 14 ATATAT...AT 18 ATATATATAT...AT
挿入/欠失 insertion/deletion	VNTR variable number of Tandem Repeat 数塩基から数十塩基の繰り返し

遺伝的多型
ゲノム配列の個体間の違い

アレルと遺伝型

GAAGG

父 母

TAAGG

SNPに注目

アレル (allele)

- 父からアレルGを継承された
- 母からアレルTを継承された

遺伝型 (genotype)

この場合はG/T

座位 (locus)

アレルの存在場所

注目の変異に対してアレル、遺伝型が存在

SNPの観測

SNP観測技術

個体の遺伝子型の観測

個別タイピング	DNAチップ
1つのSNPを観測する	網羅的にSNPを観測する
Invader法 TaqMan PCR法 GoldenGate法 ...	

正確な遺伝子型を観測することができる

1度に1,000,000SNPsの遺伝子型を観測することができる

Whole Genome Sequencing

全ゲノム配列決定

最も根本的な原因であるアレルが網羅的に観測できる

- 多型データの網羅的観測
 - SNP, STRPなども同時に観測できる
 - CNVもより明確に観測できる
- ハプロタイプの観測
 - アレルの由来元が観測できる可能性

質とコストが問題

SOLID (ABI社製)

Whole Genome Sequencing

The \$2 Million Genome

James Watson, codiscoverer of the structure of DNA, now has a copy of his very own genome. Will you be next?

By Emily Singer

FRIEDAY, JUNE 11, 2007

On Thursday, James Watson was handed a DVD containing his entire genome, sequenced in the past few months by 454, a company based in Branford, CT, that's developing next-generation technologies for efficiently reading the genome. At a cost of \$2 million, 454 sequenced Watson's genome for roughly an order of magnitude less than it would have cost using traditional machines. While this is still too expensive for the average Joe, experts say that the advance marks a major milestone toward personalized medicine—and more personalized medicine—for all.

"We've heard people talking about personalized medicine for the last year or two, but this is the first concrete incarnation of that whole era," says George Weinstock, codirector of the Human Genome Sequencing Center at Baylor College of Medicine, in Houston. Scientists at Baylor collaborated on the genome project.

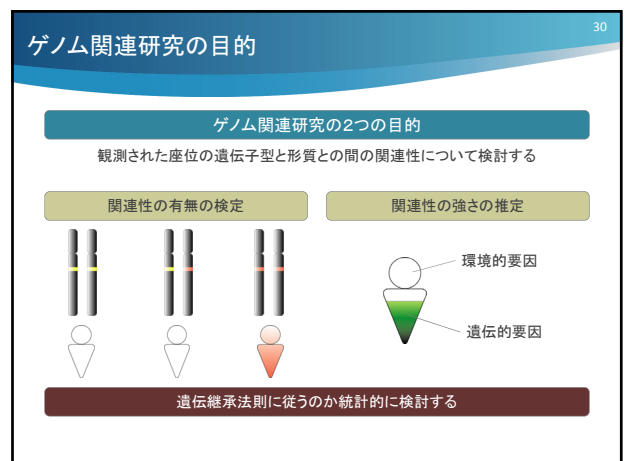
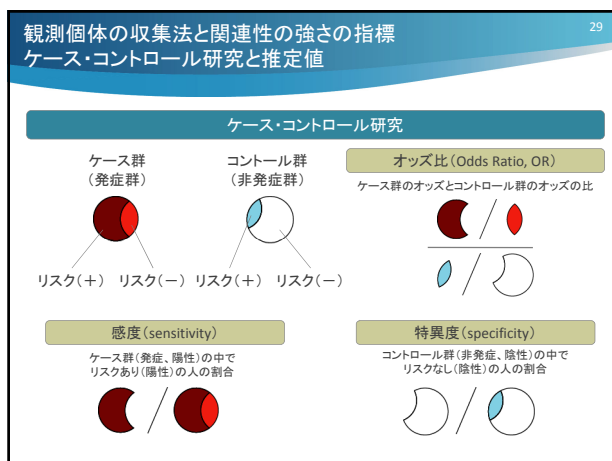
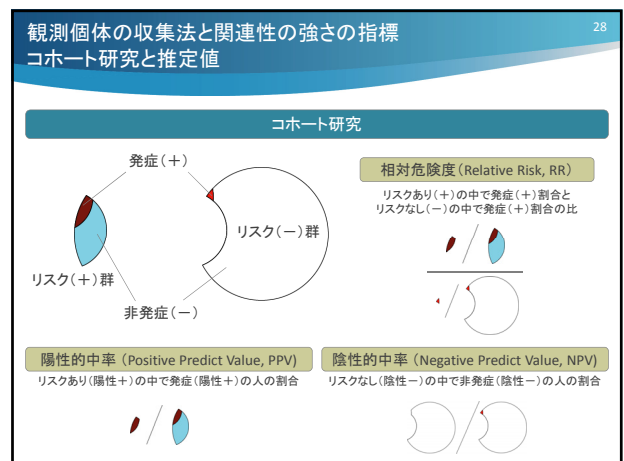
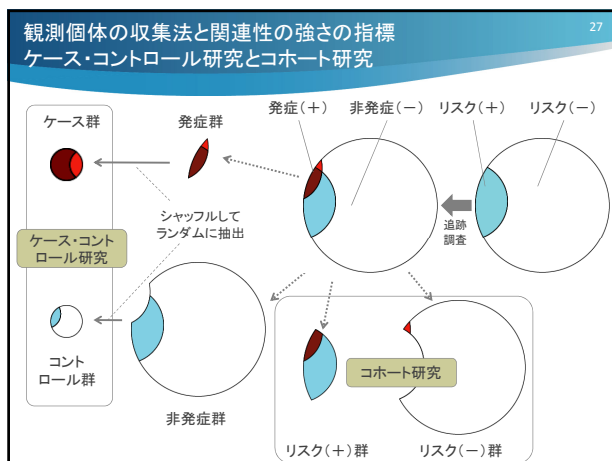
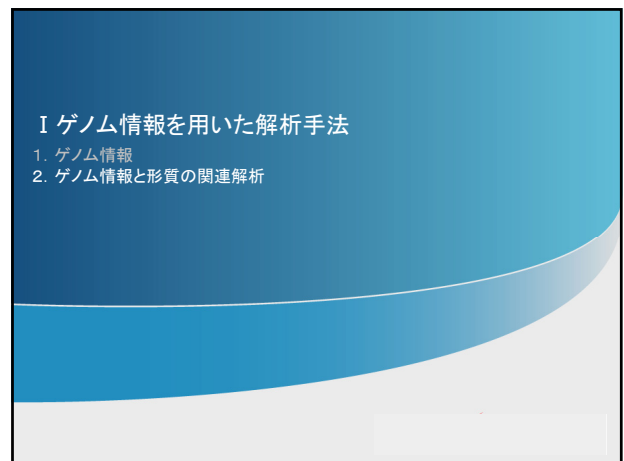
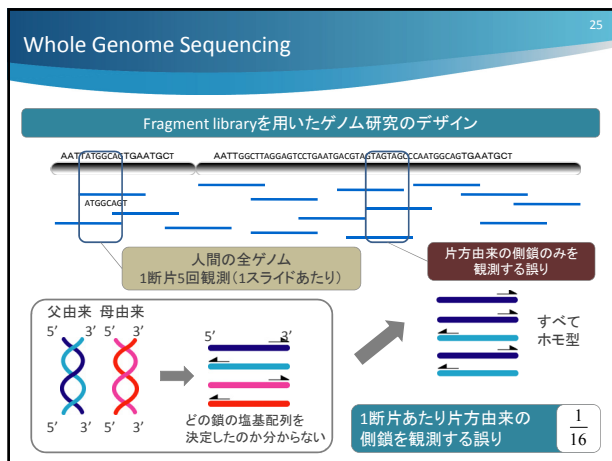
The \$2 million and two months that it took to sequence Watson's genome is a far cry from the more than ten years and \$3 billion required for the Human Genome Project's reference genome, released in 2003. Scientists ultimately hope to bring the cost down to less than \$10,000, a target price that many believe will be the turning point in genomic medicine. At that price, many people could afford to have their genomes sequenced, and doctors could then use that data to give their patients more personalized medical advice.

At a press conference at Baylor on Thursday announcing the completion of the genome, 454's founder, Jonathan Rothberg, compared the company's sequencing

DNA's daddy: James Watson, pictured above, predicted the

現在100万円以下で読める

数年後には10万円



比較対照ゲノム関連研究における仮説

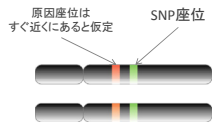
31

SNP研究における仮定

研究対象である形質の原因座位について2つの仮定をおく

原因座位の場所への仮定

今注目しているSNP座位と非常に近い



絶対連鎖不平衡の状態

SNP座位における遺伝子型の挙動と原因座位の挙動は1対1に対応する

優劣の法則への仮定

優劣の法則にしたがって表現型が決まる

優性様式

AA or AT TT

劣性様式

AA AT or TT

遺伝子型様式

AA AT TT

傾向性

AA AT TT

これらの仮定が正しいかどうか検定する

SNP研究の関連性の検定 ケース・コントロール研究

32

仮説の下での観測の表現法



優性様式

AA or AT TT

仮定

対抗馬

ケース群とコントロール群において、アレルAを保有する頻度は同じである。

母比率の差は0である

主張する仮説

ケース群とコントロール群において、アレルAを保有する頻度が異なる。

母比率の差は0でない

どちらの仮説がもっともらしいか検定する

	AA+AT	TT	合計
ケース群	48	52	100
コントロール群	32	68	100
合計	80	120	200

各群における遺伝子型頻度

	AA+AT	TT	合計
ケース群	0.48	0.52	1
コントロール群	0.32	0.68	1

母比率の差

$0.48 - 0.32 = 0.16$

SNP研究の関連性の検定 ケース・コントロール研究

33

関連性がない仮説の下での母比率の差の分布を作成する

	AT+AT	TT	合計
ケース群	42	58	100
コントロール群	38	62	100
合計	80	120	200

頻度

	AT+AT	TT	合計
ケース群	0.42	0.58	1
コントロール群	0.38	0.62	1
合計	-	-	-

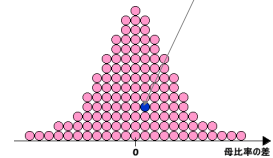
母比率の差

$0.42 - 0.38 = 0.04$

母比率の差を計算するために多くの実験をする

このSNPに関連のない形質に関するケース・コントロール研究をたくさん行い、母比率の差を計算する

関連性がないので母比率の差は0を中心にならつく



SNP研究の関連性の検定 ケース・コントロール研究

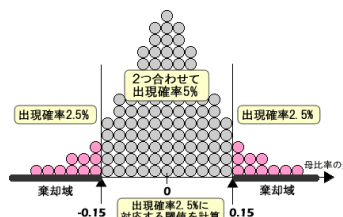
34

有意水準と棄却域の設定

この実験の場合は関連性のない仮説が帰無仮説

仮説の検定の考え方

帰無仮説で観測されにくい母比率が観測されたら、その実験は帰無仮説の下で得られたと考えるよりは、対立仮説から得られた観測だと考える



有意水準
どのくらいの観測されにくさで設定するのか、その確率

棄却域
有意水準の確率に相当する母比率の差の値域

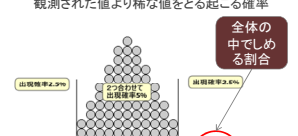
検定には帰無仮説の分布しか使わない

SNP研究の関連性の検定 P値、分布の数学的近似

35

P値 (probability value, p-value)

帰無仮説の下で観測された値より稀な値をとる起こる確率



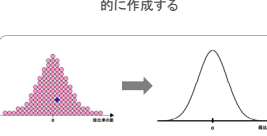
観測から計算した母比率の差

P値による結果の評価の利点

- P値だけで有意水準との比較ができる
- どのくらい稀な出来事が判断しやすい

帰無仮説に従う分布

帰無仮説の下での母比率の差の分布を数学的に作成する



数学的に実験したことにする

- 分布を数学的に近似したらカイ2乗分布 → カイ2乗検定

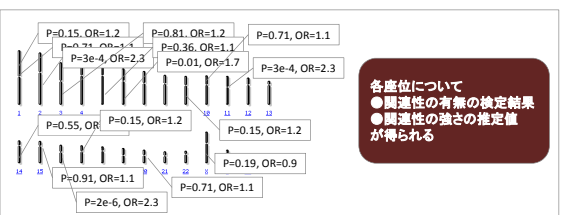
ゲノムワイド関連研究

36

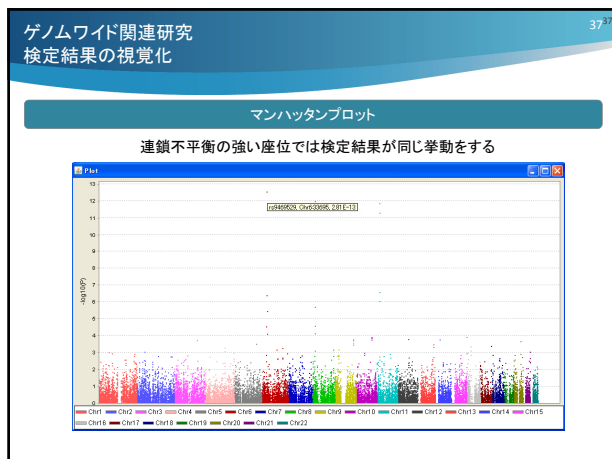
ゲノムワイド関連研究 (Genome-Wide Association Study, GWAS)

形質に関連する遺伝子を網羅的に探索する

- 全ゲノムをほぼカバーするSNPのリストが作成された (HapMapプロジェクト)
- 個人あたり50から100万SNPの遺伝子型が決定できるようになった (DNAチップ)
- 膨大な遺伝子型データを統計処理する方法が開発された



各座位について
●関連性の有無の検定結果
●関連性の強さの推定値が得られる



ゲノムワイド関連研究
多重比較法

多重比較法 (multiple comparison method)

検定の規模や検定の結果を考慮して有意水準を設定する方法

検定の規模に基づいて設定する

ボンフェローニの不等式に基づいた補正法
(ボンフェローニの補正法, Bonferroni's correction)

全体の誤りを5%におさえたいとき

1回の検定の有意水準 = $\frac{0.05}{\text{SNP座位数}}$

100万座位の場合、 $0.05/1,000,000=5E-8$

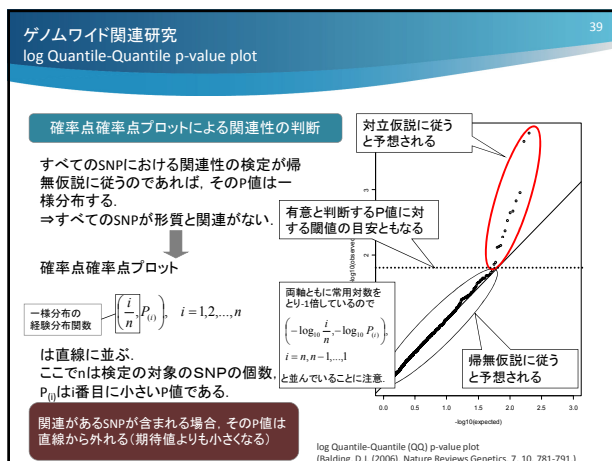
検定の結果を考慮して設定する

FDRに基づく有意水準の設定法
(BH法, FDR=False Discovery Rate)

QQプロット
(Quantile-Quantile プロット)

Permutation test

実験前 (研究デザイン): ボンフェローニの補正法
実験後: BH法, QQプロット



II ゲノム情報の応用

1. PHARMACOGENOMICSへの取り組み
2. 家畜への応用: アグーブランド豚識別法

Pharmacogenomics (ゲノム薬理学) → PGx

Pharmacogenomics

ゲノムDNAの解析を伴う薬物代謝、薬物反応と遺伝の関連

PharmacogeneticsとPharmacogenomicsを合わせてPGxと呼ぶ

薬理遺伝学と呼ばれDNAが観測できなかった時代の薬物に関する遺伝学

この分野、造語がいっぱい

薬理遺伝学: Pharmacogenetics
ゲノム薬理学: Pharmacogenomics
PGx = Pharmacogenetics + Pharmacogenomics
個別化医療: Personalized medicine
テーラーメイド医療: Tailored medicine
オーダーメイド医療: Order-made medicine

近年の薬剤の添付文書

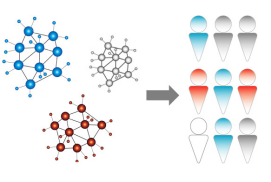
薬剤	対象疾患	関連	添付文書
Trastuzumab (Herceptin)	乳癌	効果	癌細胞にHer2/neuの発現増強がある場合に使用
6-Mercaptopurine (6-MP)	小児白血病など	副作用	TPMTの低下した個体に副作用
Atomoxetine (Strattera)	多動症	副作用	CYP2D6の変異があると副作用
Erlotinib (Tarceva)	肺小細胞癌	効果	EGFR陽性の癌細胞に効果
Irinotecan	癌	副作用	UGT1A1に変異のある個体に副作用
Isosorbide dinitrate and hydralazine (BiDil)	心不全	効果	黒人で効果

米国は個別化医療を重視し始めた: できるだけ効果があり、副作用のない薬を個別に選択する

PGxの応用: 個別化医療 43

個別化医療 (personalized medicine, オーダーメイド医療)

患者1人1人に適切な医療を提供する



東京女子医科大学附属
膠原病リウマチ痛風センターの
個別化医療

抗リウマチ薬の効果や副作用を予測

薬剤に適した患者をさがす

2008年03月08日

遺伝子検査レポート

NAT2が4を待っています		NAT2が4を待っていません	
あなた		あなた	

1. NAT2が4を待っている方は24%の確率で副作用が重症化する可能性があります
NAT2が4を待っていない方は34%の確率で副作用が重症化する可能性があります

C/C	MTHFR/同遺伝子	C/T	T/T
あなた			

1. あなたと同じ遺伝子型を持った人の副作用発症率は12%でした
2. あなたと同じ遺伝子型を持った人は、異なる人より副作用発症率のリスクが低いと思われる

PGx研究の問題 44

サンプルサイズが少ない

治験 (Clinical Trial)

Phase 1 健康人を対象とした安全性のテスト
20~30人

Phase 2 患者群を対象とした有効性、安全性のテスト
20~30人

Phase 3 患者群を対象とした既存薬との比較テスト
100人程度

Phase 4 市販後調査 (6か月程度)
数千人

コホート試験

- 副作用症例報告
- 病院患者コホート研究

副作用イベントはもともと少ない
数万人観察して30人程度

PGx研究の問題 45

検出力は小さい

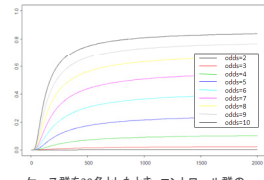
ケース群のサンプルサイズが少ないため、検出力は低下

PGxの検出力に対するAdvantage

- 関連性は強いことが多い
- 比較的小人数でリスクを持っている

コントロール群のサンプルサイズを増やす

コントロール群のサンプルサイズを増やして検出力を上げる



ケース群を30名としたとき、コントロール群のサンプルサイズ (横軸) を増やした場合の検出力 (縦軸) シミュレーション。

日本PGxデータサイエンスコンソーシアム 46

共通の健康人集団の確保


- 加盟製薬企業が共通して使用できる質の高い健康人集団のゲノム情報の蓄積
- 正しいゲノム情報の使い方と統計的手法の知識習得

現在1,000人分のゲノム情報を取得

来年までに3,000人分取得予定

今後の治験

- 遺伝的に代謝の悪い人を治験から除外することができる
- 副作用の発症の有無を早い段階から正確に予測することができる
- 効果の高い人を選択することができる



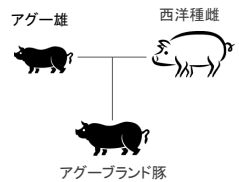
II ゲノム情報の応用

1. PHARMACOGENOMICSへの取り組み

2. 家畜への応用: アグーブランド豚識別法


アグーブランド豚の定義 48

アグーブランド豚



アグー雄 西洋種雌

アグーブランド豚 (50%)



アグー豚 (左) と西洋種 (右)

稲嶺ら (2009) 琉球在来豚 (アグー) の近交退化を緩和するための育種技術の確立。沖縄県畜産研究センター研究報告, 47.

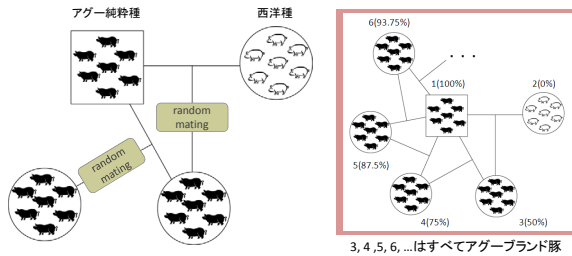
アグー豚 (純粋種) を雄とし、西洋種雌 (4種) またはアグーブランド豚雌として交配した豚をアグーブランド豚とよぶ

アグーブランド豚の定義

49

戻し交配

アグー純粋種を雄として、アグーブランド豚(雌)とのかけ合わせもアグーブランド豚



偽アグーブランド豚の増加

50

アグー豚雄(純粋種)

約600頭(登録制)



アグーブランド豚

約14,000頭



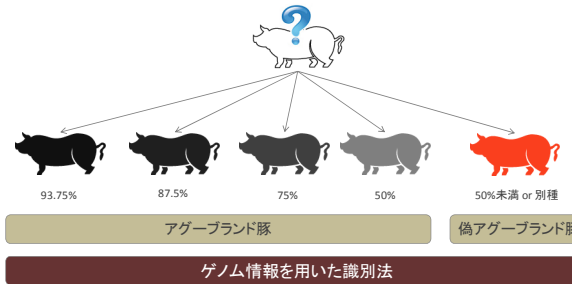
出荷量はもっと多い
多くの偽物が含まれている可能性がある

アグーブランド豚識別SNPの同定法

51

アグーブランド豚の識別

未知の観測個体がアグーブランド豚であるかの判定、さらにブランドレベルの識別



ゲノムワイドチップを用いたアグーブランド豚識別法

52

アグー純粋種

約60,000SNPsを観測



	ALGA009	ALGA014	ALGA021	ALGA022	ALGA046
A001	AT	CC	AA	AT	CC
A002	AT	CG	AA	TT	CC
A003	TT	CG	AA	TT	CG
A000	AT	CC	AA	AT	CC

アグー純粋種のSNPデータベース

未知の豚



	ALGA009	ALGA014	ALGA021	ALGA022	ALGA046
U001	AT	CC	AA	AT	CC

遺伝的な一致率を推定

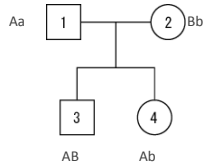
遺伝継承法則に基づいた推定

NIBDの期待値とアグーブランド豚識別法 個体間の同祖アレル、IBDとIBS

53

IBD (Identity By Decent)

ある1つの座位において2人の保有アレルが同祖である

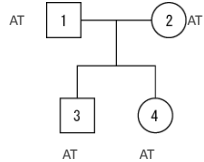


IBDの例

- 個体3と4のアレルAは同祖である
- 個体2と3のアレルBは同祖である

IBS (Identity By State)

ある1つの座位において2人の保有アレルが同祖である可能性がある



IBSの例

- 個体3と4のアレルTはIBSであるがIBDとは限らない

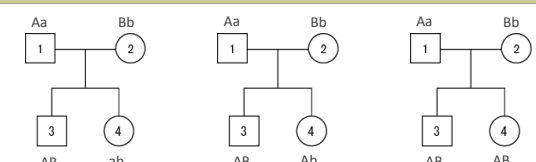
NIBDの期待値とアグーブランド豚識別法 NIBD

54

NIBD (Number of alleles shared Identity By Decent)

ある1つの座位において2人の間でIBDであるアレルの個数

個体3と個体4の間のNIBD



NIBD=0

NIBD=1

NIBD=2

NIBDは0, 1, 2のどれかの値をとる

NIBDの期待値とアグーブランド豚識別法
NIBDの分布と期待値

NIBDの分布とNIBDの期待値
NIBDが0, 1, 2となる確率

個体3と個体4の間のNIBDの分布

NIBD=0		NIBD=1		NIBD=2	
個体3	個体4	個体3	個体4	個体3	個体4
AB	ab	AB	Ab	AB	AB
Ab	aB	Ab	aB	Ab	Ab
aB	AB	aB	AB	aB	aB
ab	AB	ab	ab	ab	ab

分離の法則

$$P(NIBD=0) = \frac{1}{4}$$

$$P(NIBD=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(NIBD=2) = \frac{1}{4}$$

NIBDの期待値

$$\sum_{x=0}^2 xP(NIBD=x) = 1$$

NIBDを用いた解析法

ノンパラメトリック連鎖解析
浸透率を設定しない解析
データの収集が特徴的

罹患した個体に注目して家系を集める

罹患同胞対解析
罹患した兄弟とその両親のデータを集める

TDT解析 (Transmission Disequilibrium Test)
罹患した子供とその両親のデータ (トリオデータ) を集める

分離の法則の例外

片方のアレルが伝達される割合が多い

NIBDの期待値とアグーブランド豚識別法
戻し交配とNIBDの期待値

バッククロスとNIBDの期待値
個体1と戻し交配 (バッククロス) によって観測された個体4の間のNIBDの分布と期待値

個体3		個体4		NIBD	
AB	Aa	AA	2	Ab	Aa
AB	Aa	AB	1	Ab	Ab
aB	Aa	aA	2	aB	aA
aB	Aa	aB	1	ab	Ab

NIBDの期待値

$$1 \times \frac{8}{16} + 2 \times \frac{8}{16} = 1.5$$

Proportion of shared alleles

$$\frac{1.5}{2} = 0.75$$

NIBDの期待値とアグーブランド豚識別法
戻し交配とNIBDの期待値

バッククロスとNIBDの期待値

個体1と個体5の間のNIBDの期待値

$$1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = 1.75 \quad (87.75\%)$$

個体1と個体4の間のNIBDの期待値

$$0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0.5 \quad (25\%)$$

IBDの分布の推定、NIBDの期待値の推定

未知の個体とアグー豚 (純粋種) とのNIBD期待値推定

登録アグー

すべての登録アグーについて算出

登録ID	NIBD	Proportion of shared alleles
A001	0.24	12%
A002	0.42	21%
A003	0.1	5%
...
A123	1.78	89%
...
A539	0.82	41%

NIBDの期待値を算出

同祖となるアレルの個数を含む割合が50%を超えた登録アグーがいれば、アグーブランド豚である可能性が高い

NIBDの期待値とアグーブランド豚識別法
未知個体のNIBD推定

未知の個体とアグー豚 (純粋種) とのNIBD期待値推定

登録アグーとのNIBDおよび同祖アレル保有割合

登録ID	NIBD	Proportion of shared alleles
A001	0.24	12%
A002	0.42	21%
A003	0.1	5%
...
A123	1.78	89%
...
A539	0.82	41%

西洋種 (0%)

50%アグー

75%アグー

87.75%アグー

93.75%アグー

Proportion of shared alleles for n generation

$$p_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

アグー豚を雄とした場合とそれ以外との区別

同じProportion同士を交配させた豚以外は区別できる

判別可能

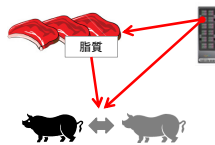
判別困難

アグー豚 (A123)

費用の問題

豚の遺伝子検査にコストがかかると
アグーブランド豚の単価を上げるしかない

- 識別に効率のよいSNPの選択
 - 検出力によるSNP数の推定
- 代用できるバイオマーカーの探索



その他の沖縄ブランド産地保護

シイクワシャー(シークワーサー、ヒラミレモン、クガニー)

産地偽装多し！



しらかわファームHPより
<http://shirakawanouen.blog.so-net.ne.jp/2009-09-02>

国策である那覇空港のハブ化に伴い、東南アジアを産地とするシークワサーが多く入ってくる

植物は単価が安すぎて遺伝子検査が難しい

植物

ユークリッドのゲノム研究

ユーカリの気候・土壌による発育の遺伝的要因の探索



王子製紙HP
<http://www.ojipaper.co.jp/envi/mori/syokurin/index.html>

人の疾患原因はもちろん
多くの分野でゲノム情報が
活用されています

日本人の出身地予測

ゲノムワイドチップを用いた日本人出身地予測

Original Article
Journal of Human Genetics (2011) 99, 529–533; doi:10.1038/jhg.2010.43; published online 17 June 2010

Establishment of a standardized system to perform population structure analyses with limited sample size or with different sets of SNP genotypes

Natsuko Kumatashi¹, Yumi Yamaguchi-Kabata², Atsuko Takahashi³,
Mitsuki Kubo⁴, Yutaka Nakamura⁵ and Naoyuki Kamata¹

¹Laboratory for Statistical Analysis, Research Group for Medical Information, Center for Genomic Medicine, KIOKA, Tokyo, Japan

²Laboratory for Genotyping Development, Research Group for Genotyping, Center for Genomic Medicine, KIOKA, Tokyo, Japan

³Laboratory for Genotyping Development, Research Group for Genotyping, Center for Genomic Medicine, KIOKA, Tokyo, Japan

⁴Laboratory for Medical Informatics, Human Genome Center, the Institute of Medical Science, the University of Tokyo, Tokyo, Japan

⁵Correspondence: Dr Kumatashi, Laboratory for Statistical Analysis, Center for Genomic Medicine, 1-1-1, Shirokane Bldg, Minato-ku, Tokyo 108-8501, Japan. E-mail: natsuko@kioaka.jp

Received 16 November 2009; Revised 9 May 2010; Accepted 12 May 2010; Published online 17 June 2010.

Natsuhiko Kumasaka, PhD

統計学→遺伝統計学は◎、生物学→遺伝統計学は△

統計学の知識を実感し納得できる分野

興味を持たれ方は是非！

kamitsuji@stagen.co.jp



株式会社ステージン 遺伝統計解析事業部
〒111-0051 東京都台東区蔵前4-11-6 KUGAビル8F
tel: (03) 5835-2137 / 2138, fax: (03) 5835-2139
URL: <http://www.stagen.co.jp/>
e-mail: kamitsuji@stagen.co.jp

遺伝統計教育/統計解析/コンサルテーション/
システム開発/技術移転

Boosting for Maximization of the Partial Area under the ROC Curve

OSAMU KOMORI*

*The Institute of Statistical Mathematics,
Midori-cho, Tachikawa, Tokyo 190-8562, Japan
komori@ism.ac.jp*

SHINTO EGUCHI

*The Institute of Statistical Mathematics,
Midori-cho, Tachikawa, Tokyo 190-8562, Japan
eguchi@ism.ac.jp*

SUMMARY

The receiver operating characteristic (ROC) curve has attracted wide attention for its utility in the medical and biostatistical fields. Given a set of multiple markers obtained from a clinical test or an examination, the area under the ROC curve (AUC) is measured for its ability to discriminate between the controls and cases. Recently, the partial area under the curve (pAUC) has been gaining in popularity, because the pAUC is more suitable for clinical settings in which a high true positive rate is required with a very low false positive rate. Moreover, the pAUC is more sensitive to the effects of markers in clinical evaluation, compared with the AUC, which is often criticized for not properly reflecting these effects. In this context, we have developed a new statistical method that focuses on the pAUC based on a boosting technique. The markers are combined componentially in the boosting algorithm using natural cubic splines or decision stumps (single-level decision trees), according to the types of markers used. We show that the resulting score plots are useful for understanding how each marker is associated with the outcome variable (affected or unaffected). We compare the performance of our boosting method with those of other existing methods, and demonstrate its utility using a real data set.

Keywords: Boosting; Classification; Partial area under the ROC curve; Smoothing.

1. INTRODUCTION

The receiver operating characteristic (ROC) curve has been widely used in various scientific fields in situations where the evaluation of discrimination performance is of great concern for the researchers. The area under the ROC curve (AUC) is the most popular metric because it has a simple probabilistic interpretation (Bamber, 1975) and consists of two important rates used to assess classification performance: the true positive rate (TPR) and the false positive rate (FPR). The former is a probability of an affected subject being correctly judged as positive; the latter is that of an unaffected subject being improperly judged as positive. Since the two probabilities characterize different aspects of classification performance, they should be reported separately (Baker, 2003). Hence, the AUC has an advantage over a single measure of performance such as the odds ratio or relative risk (Pepe *and others*, 2004). However, the AUC has been severely criticized for inconsistencies arising between statistical significance derived from the AUC and the corresponding clinical significance when the usefulness of a new marker is evaluated (Cook, 2007). Recently, Pencina *and others* (2008) propose a criterion termed integrated discriminant improvement, and show its advantage over the AUC in the assessment of a new marker. In this context, the partial AUC (pAUC) has been gaining more popularity relative to the AUC in a number of fields (Walter, 2005; Qi *and others*, 2006).

Dodd and Pepe (2003) propose a regression modeling framework based on the pAUC, and apply this framework to investigation of a relationship between multiple markers and the outcome variable. Cai and Dodd (2008) make some modification to improve the efficiency of the estimation of parameters, and provide graphical tools for the model checking. In regard to classification problems, Pepe and Thompson (2000) propose a method for deriving a linear combination of two markers that optimizes the AUC as well as the pAUC. However, as recognized by Pepe *and others* (2006), more general approaches are

required when the number of markers is quite large; in these cases, marker selection procedure is also indispensable.

In this paper, we propose a new statistical method designed to maximize the pAUC using a boosting technique and the approximate pAUC. The approximation-based method makes it possible to nonlinearly combine more than two markers, based on basis functions of natural cubic splines as well as decision stumps. The resultant score plots for each marker enable us to observe how the markers are associated with the outcome variable in a visually apparent way. Hence, our boosting method attaches importance not only to the classification performance but also to the interpretation of the results, which is essential in clinical and medical fields

This paper is organized as follows. In Section 2, we give a brief review of the AUC and pAUC, and show a relationship between the pAUC and the approximate pAUC in Theorem 1. We present a new boosting method, pAUCBoost, in Section 3, and compare it with other existing methods such as SDF (Pepe and Thompson, 2000), AdaBoost (Freund and Schapire, 1997), LogitBoost (Friedman *and others*, 2000) and GAMBoost (Tutz and Binder, 2006) in Section 4. In the next section, we demonstrate the utility of pAUCBoost using a breast cancer data set, in which we use both clinical and genomic data. In Section 6, we summarize and make concluding remarks.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to express acknowledgement to Professor John Copas. He kindly gave us some useful comments and suggestions to this paper. We also note that this study is supported by the Program for Promotion of Fundamental Studies in Health Sciences of the National Institute of Biomedical Innovation (NIBIO).

REFERENCES

- BAKER, S. G. (2003). The central role of receiver operating characteristic (ROC) curves in evaluating tests for the early detection of cancer. *Journal of the National Cancer Institute* **95**, 511–515.
- BAMBER, D. (1975). The area above the ordinal dominance graph and the area below the receiver operating characteristic graph. *Journal of Mathematical Psychology* **12**, 387–415.
- CAI, T. AND DODD, L. E. (2008). Regression analysis for the partial area under the ROC curve. *Statistica Sinica* **18**, 817–836.
- COOK, N. R. (2007). Use and misuse of the receiver operating characteristic curve in risk prediction. *Circulation* **115**, 928–935.
- DODD, L. E. AND PEPE, M. S. (2003). Partial AUC estimation and regression. *Biometrics* **59**, 614–623.
- FREUND, Y. AND SCHAPIRE, R. E. (1997). A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. *Journal of computer and system sciences* **55**, 119–139.
- FRIEDMAN, J., HASTIE, T. AND TIBSHIRANI, R. (2000). Additive logistic regression: a statistical view of boosting. *The Annals of Statistics* **28**, 337–407.
- PENCINA, M. J., D’AGOSTINO SR., R. B., D’AGOSTINO JR., R. B. AND VASAN, R. S. (2008). Evaluating the added predictive ability of a new marker: From area under the ROC curve to reclassification and beyond. *Statistics in Medicine* **27**, 157–172.
- PEPE, M. S. AND THOMPSON, M. L. (2000). Combining diagnostic test results to increase accuracy. *Biostatistics* **1**, 123–140.
- PEPE, M. S., CAI, T. AND LONGTON, G. (2006). Combining predictors for classification using the area under the Receiver Operating Characteristic curve. *Biometrics* **62**, 221–229.
- PEPE, M. S., JANES, H., LONGTON, G., LEISENRING, W. AND NEWCOMB, P. (2004). Limitation of the odds ratio in gauging the performance of a diagnostic, prognostic, or screening marker. *American Journal of Epidemiology* **159**, 882–890.
- QI, Y., JOSEPH, Z. B. AND SEETHARAMAN, J. K. (2006). Evaluation of different biological data and computational

classification methods for use in protein interaction prediction. *Proteins: Structure, Function, and Bioinformatics* **63**, 490–500.

TUTZ, G. AND BINDER, H. (2006). Generalized Additive modeling with implicit variable selection by likelihood-based boosting. *Biometrics* **62**, 961–971.

WALTER, S. D. (2005). The partial area under the summary ROC curve. *Statistics in Medicine* **24**, 2025–2040.

ルート n 一致推定量を用いたラプラス近似の妥当性について

高崎経済大学 宮田庸一¹

1 はじめに

ベイズ統計におけるラプラス近似は、ベイズ推定量、ベイズファクター、予測分布を近似するときしばしば用いられる。ラプラス近似の妥当性を議論する場合、多くの著者 (Crowder 1998, Tierney, and Kadane 1986, Miyata 2004) は "well-behaved data sequences" という観点からの十分条件を与えている。"well-behaved data sequences" とは、Laplace 近似が妥当性を持つために、事後分布がよい振る舞いをするにつけられた条件であり、推定量を含んだ条件となっている。

一方で, Johnson and Ladalla (1979), Ladalla (1990), Kass, Tierney, and Kadane (以後 KTK と略, 1990) らは, 統計モデル (尤度) に対して条件をつけてラプラス近似を導出するアプローチがある。特に KTK により提案された条件は Laplace regularity と呼ばれている。多数の著者により計算しやすい推定法が提案されていることを考えると, MLE に限らず、より広いクラスの推定量を中心に漸近展開した方がより応用しやすい。しかし実際には最尤推定量 (MLE), もしくは事後モードを中心に漸近展開する手法に限定されていることが多い。

このため今回は以下の報告を行う。

- \sqrt{n} 一致性を持つクラスの推定量を中心に漸近展開した場合のラプラス近似の導出。
- 近似が妥当性を持つための十分条件を Kass, Tierney, and Kadane(1990) の Laplace regularity を拡張する形で与える。
- $O_p(n^{-1})$ の漸近誤差を持つ Laplace 近似の構築法

2 準備

$\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_d \subseteq \mathbb{R}^d$ をパラメーター空間とし, $\boldsymbol{\theta} \equiv (\theta_1, \dots, \theta_d)' \in \Theta$ とする。ここで $'$ は転置を表す。 (Ω, \mathcal{A}) を可測空間, $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ は (Ω, \mathcal{A}) 上の確率分布族, $\{Y_i : i = 1, 2, \dots\}$ は (Ω, \mathcal{A}) 上の確率過程で, Y_i は $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ における値を取る。ここで \mathcal{Y} は \mathbb{R} の部分集合, \mathcal{B} は \mathcal{Y} におけるボレル集合族。我々は, 全ての n に対して, $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$ の確率分布は σ 有限測度に支配されており, P_θ の下での \mathbf{Y} の密度関数を $p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ とする。 $\mathbf{y}^\infty = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n, \dots)$ は観測列で, $p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ は, 最初の n 個の観測値 $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ の依存することに注意されたい。 θ_0 を真のパラメーター, そして "a.e. P_{θ_0} " はしばしば "a.e. P_0 ", もしくは "a.s." と省略する。 $\pi(\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ の事前分布とする。

2.1 事後平均

未知のパラメーターを含む関数 $g(\boldsymbol{\theta})$ に対するベイズ推定量は

$$E[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}] = \frac{\int_{\Theta} g(\boldsymbol{\theta}) p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}{\int_{\Theta} p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}, \quad (1)$$

で与えられる。 Y_{new} の予測分布の場合, $g(\boldsymbol{\theta}) = p(y_{new}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})$ とする。

¹この研究は 2009 年度高崎経済大学特別研究助成金の支援を受けている

2.2 Bayes factor

ここでは $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi}) \in B \times \Psi$: パラメーター空間, $\mathbf{Y} \sim p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi})$ とし, 以下の検定問題を考える.

$$H_0 : \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 \text{ vs } H_a : \boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{\psi}_0$$

この時, ベイズ型アプローチの一つとして, Bayes factor がある.

$$K(\pi_0, \pi) = \frac{\int_B p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi}_0) \pi_0(\boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta}}{\int_{B \times \Psi} p_n(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi}) \pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\psi}} \quad (2)$$

ここで $\pi_0(\boldsymbol{\beta}) = \int_{\Psi} \pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\psi}) d\boldsymbol{\psi}$.

3 Laplace's Method and Regularity Conditions

このため, 上記の (1), (2) のような量を近似するためには

$$\mathcal{I}_n = \int_{\Theta} \lambda(\boldsymbol{\theta}) \exp\{-nh^n(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta}$$

の形に対する近似を考える必要がある. ここで $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ は n に依存しない.²

DEFINITION 1 $\mathcal{I}_n = \hat{\mathcal{I}}_n(1 + O(n^{-\alpha}))$, $(\alpha > 0)$ の時, \mathcal{I}_n に対するラプラス近似 $\hat{\mathcal{I}}_n$ は $O(n^{-\alpha})$ の漸近誤差を持つと言う.

Kadane and Vaidyanathan (1992) は $\alpha \geq 1$ の時に, Bayes factor を利用した場合, $H_0 : \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_0$ の下で H_0 を選択する事後確率が 1 に収束することを示し, また $H_a : \boldsymbol{\phi} \neq \boldsymbol{\phi}_0$ の下で H_0 を選択する事後確率が 0 に収束することを示した.

注意 1: MLE を用いたラプラス近似を行う場合, 通常の正則条件の下で $O(n^{-1})$ の漸近誤差を持つ.

ここで \mathcal{I}_n に対するラプラス近似の正則条件を与える. この条件は, 通常 "well-behaved data sequence" と呼ばれる条件に相当する. ここで記号の簡略化のため $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \equiv D$, $\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \equiv D^2$, $\frac{\partial^d}{\partial \theta_{j_1} \dots \partial \theta_{j_d}} \equiv \partial_{j_1 \dots j_m}$, $\partial_{j_1 \dots j_m} h^n(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = h_{j_1 \dots j_m}^n$, $D^2 h^n(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = D^2 h$, $\lambda(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \lambda$ etc とする. また $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}'\mathbf{v})^{1/2}$, ϵ 近傍を $B_\epsilon(\boldsymbol{\theta}_0) = \{\boldsymbol{\theta} | \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\| < \epsilon\}$ とする.

(A1) for $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$, $\{h^n(\boldsymbol{\theta})\}$ は 6 階連続微分可能, かつ $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ は 4 階連続微分可能.

(A2) For all n , $P_0(|\mathcal{I}_n| < \infty) = 1$

(A3) for $\forall 1 \leq j_1, \dots, j_m \leq d$ ($m = 1, 2, \dots, 6$), $\exists \epsilon > 0$ and $M > 0$ s.t., $P_0(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_\epsilon(\hat{\boldsymbol{\theta}})} |\partial_{j_1 \dots j_m} h(\boldsymbol{\theta})| < M) = 1$

(A4) $\exists \eta > 0$ s.t., $P_0 \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \det(D^2 h(\hat{\boldsymbol{\theta}})) > \eta \right] = 1$, かつ $P_0 \left[\text{for } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}' D^2 h(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{x} > 0 \right] = 1$

(A5) $\exists \epsilon > 0$ and $M > 0$ s.t., for $\forall \delta (0 < \delta < \epsilon)$, $B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \subseteq A_0$ a.e. P_0 and

$$P_0 \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} n^2 \left| \det(n D^2 h)^{1/2} \hat{C}_n^{-1} \int_{A_0 - B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \lambda(\boldsymbol{\theta}) \exp\{-n(h^n(\boldsymbol{\theta}) - h^n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} d\boldsymbol{\theta} \right| < M \right] = 1, \quad (3)$$

ここで $\hat{C}_n = \exp \left(\frac{n}{2} D h(\hat{\boldsymbol{\theta}})' [D^2 h(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} D h(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)$

²ただし \mathbf{y} の有限個の要素には依存してもよい

(A6) $\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{EX}\| \rightarrow 0$ a.e. P_0 . ここで $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{EX} = \text{argsup}_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}}(-h^n(\boldsymbol{\theta}))$ は $-h^n(\boldsymbol{\theta})$ の正確 (exact) なモード.

(A7) $\exists M > 0$ and $\alpha \geq 1/2$ s.t., $P_0(\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha |\partial_j h(\hat{\boldsymbol{\theta}})| < M) = 1$ ($j = 1, \dots, d$), 即ち $Dh(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = O(n^{-\alpha})$ a.e. P_0 .

THEOREM 1 $A_0 \subseteq \boldsymbol{\Theta}$ とする. この時, 仮定 (A1)–(A7) の下で

$$\begin{aligned} \int_{A_0} \lambda(\boldsymbol{\theta}) \exp\{-nh^n(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta} &= (2\pi)^{d/2} \det(nD^2h)^{-1/2} \hat{C}_n \exp\{-nh\} \left[\lambda \Phi^A + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum \lambda_i \Phi_i^A - \frac{\lambda}{6} \sum h_{ijk} \Phi_{ijk}^A \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \sum \lambda_{ij} \Phi_{ij}^A + \sum \left(-\frac{\lambda}{24} h_{ijkq} - \frac{1}{6} h_{ijk} \lambda_q \right) \Phi_{ijkq}^A + \frac{\lambda}{72} \sum h_{ijk} h_{qrs} \Phi_{ijkqrs}^A \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{1}{6} \sum \lambda_{ijk} \Phi_{ijk}^A + \sum c_{ijkqr}^{3/2} \Phi_{ijkqr}^A + \sum c_{ijkqrst}^{3/2} \Phi_{ijkqrst}^A \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda}{1296} \sum h_{ijk} h_{qrs} h_{tuv} \Phi_{ijkqrstuv}^A \right) + O(n^{-2}) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $A = \{\mathbf{u} | \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{u} \in A_0\}$, $\tilde{\mathbf{b}} = -\sqrt{n}[D^2h]^{-1}Dh = (\tilde{b}_i)$, $\Phi^A = \int_A n(\mathbf{u} | \tilde{\mathbf{b}}, [D^2h]^{-1}) d\mathbf{u}$, $\Phi_i^A = \int_A u_i n(\mathbf{u} | \tilde{\mathbf{b}}, [D^2h]^{-1}) d\mathbf{u}$, $\Phi_{ij}^A = \int_A u_i u_j n(\mathbf{u} | \tilde{\mathbf{b}}, [D^2h]^{-1}) d\mathbf{u}$ とする. $c_{ijkqr}^{3/2} = -\frac{1}{24} h_{ijkq} \lambda_r - \frac{1}{12} h_{ijk} \lambda_{qr} - \frac{\lambda}{120} h_{ijkqr}$, $c_{ijkqrst}^{3/2} = \frac{1}{72} h_{ijk} h_{qrs} \lambda_t + \frac{\lambda}{144} \sum h_{ijk} h_{qrst}$.

PROOF 略. KTK (1990), Miyata(2004) と同様の議論で示すことができる.

特に $A_0 = \boldsymbol{\Theta}$ の時, \mathcal{I}_n に対する以下の近似式を得る.

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\Theta}} \lambda(\boldsymbol{\theta}) \exp\{-nh^n(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta} &= (2\pi)^{d/2} \det(nD^2h)^{-1/2} \hat{C}_n \exp\{-nh\} \lambda \\ &\quad \times \left[1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) \tilde{b}_i - \frac{1}{2} \sum_{ijk} h_{ijk} h^{ij} \tilde{b}_k \right)}_{O(n^{-\alpha})} - \underbrace{\frac{1}{6\sqrt{n}} \sum_{ijk} h_{ijk} \tilde{b}_i \tilde{b}_j \tilde{b}_k}_{O(n^{1-3\alpha})} \right. \\ &\quad + \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda} \right) h^{ij} - \frac{1}{24} \sum_{ijkq} h_{ijkq} \mu_{ijkq} - \frac{1}{6} \sum_{ijk} h_{ijk} \left(\frac{\lambda_q}{\lambda} \right) \mu_{ijkq} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{72} \sum h_{ijk} h_{qrs} \mu_{ijkqrs} \right\} + O(n^{-2\alpha}) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで μ_{ijkq}, μ_{ijkqrs} は多変量正規分布 $N_d(\mathbf{0}, [D^2h]^{-1})$ における 4 次と 6 次の中心積率で, 条件 (A3) より $O(1)$ であることがわかる. よって n^{-1} の項の $\{\dots\}$ の部分は $O(1)$ となる.

4 Asymptotic mode-Laplace regular

今後, 話を簡単にするため, $A_0 = \boldsymbol{\Theta}$, $l_n(\boldsymbol{\theta}) = \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta})$ とする. 以下では, 統計モデル $\mathcal{P} = \{p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) | \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ に対する条件を与える.

列 $\{l_n(\boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\theta}), \hat{\boldsymbol{\theta}}\}$ は, 以下の条件 (C1)–(C6) を満たすとき, Asymptotic mode-Laplace regular と言う.

(C1) for $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$, and for $\forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, $p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) > 0$. for $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$, $l_n(\boldsymbol{\theta})$ は 6 階連続微分可能, かつ $\lambda(\boldsymbol{\theta})$ は 4 階連続微分可能.

(C2) for each $\theta_0 \in \Theta$, $\exists \epsilon > 0$ and $M > 0$ s.t., $B_\epsilon(\theta_0) \subseteq \Theta$, かつ for $\forall 1 \leq j_1, \dots, j_m \leq d$ ($m = 1, 2, \dots, 6$),
 $P_0(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in B_\epsilon(\theta_0)} n^{-1} |\partial_{j_1 \dots j_m} l_n(\theta)| < M) = 1$

(C3) for each $\theta_0 \in \Theta$, \exists 正定値符号行列 $I(\theta_0)$ s.t., $P_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} D^2 l_n(\theta_0) \right) = I(\theta_0) \right] = 1$

(C4) for each θ_0 and for $\forall \delta > 0$,

$$P_0 \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in B_\delta(\theta_0)} \{n^{-1}(l_n(\theta) - l_n(\theta_0))\} < 0 \right] = 1 \quad (6)$$

(C5) $\hat{\theta} \rightarrow \theta_0$ a.s.

(C6) $\frac{1}{n} D l_n(\hat{\theta}) = O(n^{-\alpha})$ a.e. P_0 . ($\alpha \geq 1/2$)

注意 2: (C1)-(C4) は統計モデルに対する条件となっており, (C5), (C6) は推定量に対する条件となっている.

注意 3: (C6) において $\frac{1}{n} D l_n(\hat{\theta}) = O_p(n^{-\alpha})$ の時は, 展開式 (4), (5) における誤差項が O から O_p に変更することが容易に示される. もし採用したい推定量が $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) = O_p(1)$ を満たすときには,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} D l_n(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{n}} D l_n(\theta_0) + \left(\frac{1}{n} D^2 l_n(\theta^*) \right) \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \quad (7)$$

と展開できる. ここで θ^* は $\hat{\theta}$ と θ_0 の間の値. この時, 右辺の第 1 項は中心極限定理を成り立つような条件 (マルチンゲール性, もしくは i.i.d.) を, 右辺の第 2 項は $\frac{1}{n} D^2 l_n(\theta^*)$ がある値 $-I(\theta_0)$ に収束するような条件を加えると, $\frac{1}{n} D l_n(\hat{\theta}) = O_p(n^{-1/2})$ を得る.

THEOREM 2 列 $\{l_n(\theta), \lambda(\theta), \hat{\theta}\}$ は *Asymptotic mode-Laplace regular*. その時, 確率 1 で (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) for $\forall 1 \leq j_1, \dots, j_m \leq d$ ($m = 1, 2, \dots, 6$), $\exists \epsilon > 0$ and $M > 0$ s.t.,

$$P_0^n \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in B_\epsilon(\hat{\theta})} \frac{1}{n} |\partial_{j_1 \dots j_m} l_n(\theta)| < M \right) = 1$$

(ii) $\exists \eta > 0$ s.t., $P_0 \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \det \left(-\frac{1}{n} D^2 l_n(\hat{\theta}) \right) > \eta \right] = 1$, かつ $P_0 \left[\text{for } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}' \left(-\frac{1}{n} D^2 l_n(\hat{\theta}) \right) \mathbf{x} > 0 \right] = 1$

(iii) $\exists \epsilon > 0$ and $M > 0$ s.t., for $\forall \delta (0 < \delta < \epsilon)$, $B_\delta(\hat{\theta}) \subseteq \Theta$ a.e. P_0 and

$$P_0 \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in B_\delta(\hat{\theta})} \{n^{-1}(l_n(\theta) - l_n(\hat{\theta}))\} < 0 \right] = 1 \quad (8)$$

注意 4: (i) は (A3) に, (ii) は (A4) に対応している. (iii) \implies (A5) は以下で示される. 結果的に $h^n(\theta) = -n^{-1} l_n(\theta)$ とおくと, (C1)-(C6) \implies (A1), (A3)-(A7) が言える.

PROPOSITION 3 $\lambda(\theta) = a(\theta)\pi(\theta)$.

$\int_{\Theta} |\lambda(\theta)| d\theta < \infty$ とする. この時, 条件 (iii) \implies (A5).

注意 5: もし $a(\theta) \equiv 1$ の時は, $\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta < \infty$ であり, これは事前分布が proper であることを意味する.

注意 6: $\pi(\theta)$ が improper な場合は, KTK(1990) のアプローチを用いる必要がある. ただし KTK の方法は一部誤りがあるため, Y_1, \dots, Y_n が互いに独立の時以外は注意しなければならない.

5 $O(n^{-1})$ の漸近誤差を持つ Laplace 近似の構築法

モーメント推定量のように推定関数を用いた推定量 $\hat{\theta}$ は、一般的には漸近有効でない。ここで以下を仮定する。

$$[E1] \sqrt{n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) = O_p(1)$$

$$[E2] \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) = O_p(1)$$

この時, $\hat{\theta}_{ML} - \hat{\theta} = O_p(n^{-1/2})$ がわかる。これより, $\hat{\theta}$ を用いてラプラス近似を行った場合, $O_p(n^{-1/2})$ の漸近誤差が表れる。しかし以下の結果が知られている。

Robinson (1988): θ_{k+1}^{NR} を $\hat{\theta}$ から k 回 Newton-Raphson 法を繰り返したものとする。その時,

$$\hat{\theta}_{ML} - \theta_{k+1}^{NR} = O_p(n^{-2^{k-1}}), \quad (k = 1, 2, 3)$$

Miyata(2004,p1047 と同様の方法で): θ_k^{NW} を $\hat{\theta}$ から k 回 Newton 法を繰り返したものとする。i.e., $\theta_k^{NW} = \hat{\theta} + [-n^{-1}D^2l_n(\hat{\theta})]^{-1}n^{-1}Dl_n(\hat{\theta})$ 。その時,

$$\hat{\theta}_{ML} - \theta_{k+1}^{NW} = O_p(n^{-2^{k-1}}), \quad (k = 1, 2)$$

このことより, \sqrt{n} 一致性を持つ推定量からの上記のいずれかのワンステップ推定量を用いてラプラス近似を行うことで, 漸近誤差を $O_p(n^{-1})$ とすることができる。

6 例 (Gaussian AR(p) Process)

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t, \quad (t = 1, 2, \dots, T) \quad (9)$$

ここで $\epsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2)$. $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$, $S_p = \{\phi \in \mathbb{R}^p \mid z^p - \phi_1 z^{p-1} - \cdots - \phi_p = 0 \text{ の全ての根が単位円の内部}\}$. このとき, パラメーター空間を $\Theta \equiv S_p \times (0, \infty)$ とし, その要素を $(\phi, \sigma^2) \in \Theta$ とする。この時, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_T)$ の同時確率密度関数は以下の形で与えられる。

$$p(\mathbf{y}|\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^T \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{t=p+1}^T (y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p})^2 + \mathbf{y}_p' M_p \mathbf{y}_p \right) \right\} \det(M_p)^{1/2},$$

ここで Galbraith and Galbraith (1974) により $M_p = A_p A_p' - H' H$,

$$A_p = - \begin{pmatrix} -1 & & & \mathbf{O} \\ \phi_1 & -1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \phi_{p-1} & \cdots & \phi_1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = - \begin{pmatrix} \phi_p & \phi_{p-1} & \cdots & \phi_1 \\ & \phi_p & & \phi_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & \phi_p \end{pmatrix}$$

となることが分かっている。 p の次数が大きい時は, 厳密な MLE を求めるには繰り返しアルゴリズムが必要となり, 計算上煩雑になる。一方で擬似 MLE であれば, 推定量が陽に明示でき, 簡単な計算で導出することができる。ここで対数尤度は

$$\begin{aligned} l_T(\theta) = & \underbrace{-\frac{T-p}{2} \log 2\pi - \frac{T-p}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^T (y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p})^2}_{l^Q(\theta)} \\ & - \frac{p}{2} \log 2\pi - \frac{p}{2} \log \sigma^2 + \frac{1}{2} \log \det(M_p) - \frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{y}_p' M_p \mathbf{y}_p \end{aligned}$$

となる. ここで $(\hat{\phi}_Q, \sigma_Q^2) = \text{argsup}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} l^Q(\boldsymbol{\theta})$ とおくと, $\hat{\phi}_Q \rightarrow \phi_0$ a.s., $\sigma_Q^2 \rightarrow \sigma_0^2$ a.s. が知られている. (例えば谷口, p115). まず (C3) をチェックする.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{T} D^2 l_T(\boldsymbol{\theta}_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_0^2} \Gamma_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma_0^4} \end{pmatrix}$$

となる. ここで $\tilde{\mathbf{Y}}_{t-1} = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$, $\Gamma_0 = E_0[\tilde{\mathbf{Y}}_{t-1} \tilde{\mathbf{Y}}_{t-1}']$ は共分散行列で, $f_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda)$ を AR(p) process のスペクトル密度とすると, Γ_0 の (s, t) 成分は $\sigma(s-t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-t)\lambda} f_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) d\lambda$ と表せる. よって Γ_0 が正値定符号であることを確かめればよい. これは, 任意のベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' \Gamma_0 \mathbf{a} &= \sum_{s,t} a_s a_t \sigma(s-t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s,t} a_s a_t e^{i(s-t)\lambda} f_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_s a_s e^{is\lambda} \right|^2 f_{\boldsymbol{\theta}}(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

より確かめることができる. 次に (C4) を確認する. 途中式は省略するが, ある定数 $M_1 > 0$ が存在して,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta}(\boldsymbol{\theta}_0)} \left\{ T^{-1} [l_T(\boldsymbol{\theta}) - l_T(\boldsymbol{\theta}_0)] \right\} \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2M_1} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta}(\boldsymbol{\theta}_0)} \{ -(\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}}_Q)' \hat{\Gamma}_T (\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}}_Q) \} \quad (10)$$

となる. ここで $\hat{\Gamma}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=p+1}^T \tilde{\mathbf{Y}}_{t-1} \tilde{\mathbf{Y}}_{t-1}'$ で, $\hat{\Gamma}_T \rightarrow \Gamma_0$ a.s. であることより, 大きな T に対して, $\hat{\Gamma}_T$ は正値行列となる. よって λ_{min}^T を $\hat{\Gamma}_T$ の最小固有値とすると,

$$(10) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{min}^T}{2M_1} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta}(\boldsymbol{\theta}_0)} \{ -\|\boldsymbol{\phi} - \hat{\boldsymbol{\phi}}_Q\|^2 \} < 0 \quad (11)$$

よって示せた.

7 証明

Theorem 2 を示すためには, 次の補題が本質的な役割を果たす.

LEMMA 4 列 $\{\mathbf{a}_n\}$ は極限值 \mathbf{a} を持つ. i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$.

(a) for $\forall \delta > 0$, $\exists \delta' > 0$, $N > 0$ s.t., $n \geq N \implies B_{\delta'}(\mathbf{a}_n) \subseteq B_{\delta}(\mathbf{a})$.

(b) for $\forall \delta > 0$, $\exists \delta'' > 0$, $N > 0$ s.t., $n \geq N \implies B_{\delta''}(\mathbf{a}) \subseteq B_{\delta}(\mathbf{a}_n)$

PROOF:略.

PROOF OF THEOREM 2 最初に (i) を示す.

(C2) より零集合 $\mathcal{N}_1 \subset \Omega$ が存在して, for $\forall \boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ and $\forall \mathbf{y}^\infty \in \Omega - \mathcal{N}_1$, $\exists \epsilon > 0$ and $\exists 0 < M < \infty$ s.t.,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)} \frac{1}{n} |\partial_{j_1 \dots j_m} l_n(\boldsymbol{\theta})| < M.$$

(C5) より $\exists \mathcal{N}_2 \subset \Omega$ s.t., for $\forall \boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ and $\forall \mathbf{y}^\infty \in \Omega - (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_0$.

Lemma 4 より $\exists \epsilon' > 0$ s.t., $n \geq N_2 \implies B_{\epsilon'}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \subseteq B_{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\epsilon'}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} n^{-1} |\partial_{j_1 \dots j_m} l_n(\boldsymbol{\theta})| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)} n^{-1} |\partial_{j_1 \dots j_m} l_n(\boldsymbol{\theta})| \\ &< M \end{aligned}$$

よって (i) が示せた. 次に (ii) を示す. $\exists \mathcal{N}_3 \subset \Omega$ s.t., for $\forall \boldsymbol{\theta}_0 \in \boldsymbol{\Theta}$ and $\forall \mathbf{y}^\infty \in \Omega - \mathcal{N}_3$, $\exists \epsilon > 0$ s.t., $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)} \{-\det(-n^{-1} D^2 l_n(\boldsymbol{\theta}))\} < 0$.
よって

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{-\det(-n^{-1} D^2 l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\epsilon'}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \{-\det(-n^{-1} D^2 l_n(\boldsymbol{\theta}))\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\epsilon}(\boldsymbol{\theta}_0)} \{-\det(-n^{-1} D^2 l_n(\boldsymbol{\theta}))\} < 0 \end{aligned}$$

他も同様にして示せる.

最後に (iii) を示す. 以下の集合 C_4 を考える. 記号簡略化のため $\Theta - B_\delta(\bullet) = B_\delta(\bullet)^c$ とする.

$$C_4 = \left\{ \mathbf{y}^\infty \in \Omega \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\boldsymbol{\theta}_0)^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\boldsymbol{\theta}_0))\} < 0 \right. \right\} \quad (12)$$

$$\text{ある零集合 } \mathcal{N}_4 \supseteq \left\{ \mathbf{y}^\infty \in \Omega \left| \text{for } \forall \epsilon > 0, \text{ and } \forall M > 0, \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} |\partial_j l_n(\boldsymbol{\theta})| \geq M \right. \right\} \quad (13)$$

ある零集合 $\mathcal{N}_5 \supseteq \{\mathbf{y}^\infty \in \Omega | \hat{\boldsymbol{\theta}} \not\rightarrow^{a.s.} \boldsymbol{\theta}_0\}$ とし,

$$\hat{C}_4 = \left\{ \mathbf{y}^\infty \in \Omega \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} < 0 \right. \right\} \quad (14)$$

とする. ここで $P_0(C_4) \leq P_0(\hat{C}_4)$ を示す. Lemma 4(b) より for $\forall \mathbf{y}^\infty \in C_4 - (\mathcal{N}_4 \cup \mathcal{N}_5)$,

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} &\leq \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta''}(\boldsymbol{\theta}_0)^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} \\ &= \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta''}(\boldsymbol{\theta}_0)^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\boldsymbol{\theta}_0))\} + \frac{1}{n}(l_n(\boldsymbol{\theta}_0) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})). \end{aligned}$$

ここで (C2) と $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の強一貫性より, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}_0) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})) = n^{-1} D l_n(\boldsymbol{\theta}^*)(\boldsymbol{\theta}_0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq 0$.

よって

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta''}(\boldsymbol{\theta}_0)^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\boldsymbol{\theta}_0))\} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [l_n(\boldsymbol{\theta}_0) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in B_{\delta''}(\boldsymbol{\theta}_0)^c} \{n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\boldsymbol{\theta}_0))\} \\ &< 0 \end{aligned} \quad (15)$$

よって $\mathbf{y}^\infty \in \hat{C}_4$. ゆえに $P_0(\hat{C}_4) = 1$. \square

PROOF OF PROPOSITION 3

(iii) より $\exists N > 0$ and $c_1 > 0$ a.t., $n \geq N \implies \text{for } \boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})^c \ n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})) < -c_1$.

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\Theta} - B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})} \lambda(\boldsymbol{\theta}) \exp\{-nh^n(\boldsymbol{\theta})\} d\boldsymbol{\theta} &\leq e^{-nh} \int_{\boldsymbol{\Theta} - B_\delta(\hat{\boldsymbol{\theta}})} |\lambda(\boldsymbol{\theta})| \exp\{n \cdot n^{-1}(l_n(\boldsymbol{\theta}) - l_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}))\} d\boldsymbol{\theta} \\ &\leq e^{-nh} \exp\{-nc_1\} \int_{\boldsymbol{\Theta}} |\lambda(\boldsymbol{\theta})| d\boldsymbol{\theta}. \end{aligned}$$

これより (A5) は示された. \square

参考文献

- [1] Crowder, M. (1988). Asymptotic Expansions of Posterior Expectations, Distributions and Densities for Stochastic Process, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 40(2), 297-309.
- [2] Galbraith, R. F., and Galbraith, J. I. (1974). On the inverses of some patterned matrices arising in the theory of stationary time series. *J. Appl. Probab.* **11** 63–71.
- [3] Johnson, R. A. and Ladalla, J. N. (1979). The large sample behavior of posterior distributions when sampling from multiparameter exponential family models and allied results. *Sankhyā, Ser. B* 41:196–215.
- [4] Kadane and Vaidyanathan (1992) Approximate Bayes Factors and Orthogonal Parameters, with Application to Testing Equality of Two Binomial Proportions, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 54, No.1, pp. 129-144
- [5] Kass, R. E., Tierney, L., and Kadane, J. B. (1990). The validity of posterior expansions based on Laplace's method. In *Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics*(S. Geisser, J. S. Hodges, S. J. Press, and A. Zellner, eds.) 473–488. Amsterdam NorthHolland.
- [6] Miyata, Y. (2004). Fully exponential Laplace approximations using asymptotic modes. *J. Amer. Statist. Assoc.* 99:1037–1049.
- [7] 谷口正信 (2005) 数理統計・時系列・金融工学, 朝倉書店
- [8] Tierney, L., and Kadane, J. B. (1986). Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. *J. Amer. Statist. Assoc.* **81** 82–86.
- [9] Robinson, P.M. (1988). The stochastic difference between econometric statistics. *Econometrika* **56** 531-548.

Gerber-Shiu functions and the statistical inference

清水 泰隆

大阪大学大学院基礎工学研究科

科学技術振興機構 (JST), CREST

E-mail: yasutaka@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

1 はじめに

1.1 古典的危険理論

保険数学, 特に損害保険数学において, 保険ポートフォリオの破産問題を扱う理論は危険理論 (risk theory) と言われ, 主に欧米のアクチュアリーや統計学者を中心に固有の発展を遂げてきた. その数学的な基礎を最初に築いたのはスウェーデンのアクチュアリーであった Lundberg, F. や, 同じくスウェーデンの数理統計学者でアクチュアリーでもあった Cramér, H. であり, 彼らは, ある時刻 t までのクレーム (保険金請求) の累積額を複合ポアソン過程 C_t を用いて表現し, 保険会社の持つサープラス (準備金) R_t を以下のようにモデル化した.

$$R_t = u + \beta t - C_t; \quad C_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i. \quad (1.1)$$

ここに, u は初期サープラス, β は保険料率を表す正の定数, N は強度 λ を持つポアソン過程でクレームの頻度に対応し, U_i は分布 F_U に従う IID 正值確率変数で i 番目のクレーム額を表す. ただし, $\{U_i\}$ と N は独立とする. 確率過程 $R = (R_t)_{t \geq 0}$ を, 危険理論では**リスク過程**という. (1.1) のリスク過程は, 以後の危険理論発展における最も基本的なモデルであり, 古典的リスクモデルとか Cramér-Lundberg モデルと言われる.

危険理論における古典的問題の一つは, 保険会社の破産時刻:

$$\tau(u) := \inf \{t > 0 | R_t < 0\} \quad (1.2)$$

に関する分布の評価であり, 例えば破産確率

$$\psi(u) := \mathbb{P}\{\tau(u) < \infty\} = \mathbb{P}\left\{\inf_{t \geq 0} R_t < 0\right\} \quad (1.3)$$

の評価である. 大数の法則によれば, 確率 1 での破産を回避するためには, ある $\theta > 0$ に対して $\beta = (1 + \theta)\mathbb{E}[C_1]$ とすれば十分であることが容易に分かる. これは**純益条件** (net profit condition) と言われ, 危険理論において最も基本的な条件である. θ は安全付加率 (safety loading) と言われる. ψ の陽な表現を得ることは一般には困難であり, 古典的な危険理論では, 適当な正則条件の下で, 以下のような結果が標準的なものとして知られている:

- **不完全再生方程式 (defective renewal equation, DRE):**

$$\psi(u) = H(u) + \int_0^u \psi(u-x)g(x)dx. \quad (1.4)$$

ただし, $H(u) := \lambda\beta^{-1} \int_u^\infty (1 - F_U(x))dx$; $g(x) := \lambda\beta^{-1}(1 - F_U(x))$.

- **Pollaczek-Khinchin 公式:** 上で与えた関数 H, g に対して,

$$\psi(u) = \left(H * \sum_{n=0}^{\infty} g^{*n} \right) (u). \quad (1.5)$$

ただし, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ 上の関数 f, h に対して,

$$f * h(x) = \int_0^x f(x-y)h(y) dy$$

とし, $h^{*0} = \delta_0$ (デルタ関数); $h^{*n} = h * (h^{*(n-1)})$ と定める. “Pollaczek-Khinchin” の名は “待ち行列理論” からの由来で, 危険理論では Beekman 公式とも呼ばれる (Beekman, 1969).

- **Laplace 変換公式:** 任意の $s > 0$ に対して,

$$\mathcal{L}\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{\beta - \lambda\mu}{\beta s - \lambda(1 - \mathcal{L}_{F_U}(s))}. \quad (1.6)$$

ただし, 関数 F に対して, 以下の記法を用いている:

$$\mathcal{L}F(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} F(x) dx; \quad \mathcal{L}_F(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} F(dx).$$

- **Lundberg 不等式:** ある定数 $\gamma > 0$ が存在して,

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u}. \quad (1.7)$$

不等式の右辺を Lundberg 限界という. いくつかのリスクモデルでは下限の評価も可能である; 例えば, Willmot and Lin (2001), Rolski *et al.* (1999) の 5, 6 章などを参照.

- **Cramér-Lundberg 近似:** $u \rightarrow \infty$ のとき, (1.7) の定数 γ に対して,

$$\psi(u) \sim C e^{-\gamma u}; \quad C = \frac{\beta - \lambda m(0)}{\lambda m(-\gamma) - \beta}. \quad (1.8)$$

ただし, $m(s) = -(\mathcal{L}_{F_U})'(s)$ である ($'$ は微分を表す).

上記 (1.7), (1.8) を得るためには, F_U に対する十分なモーメント条件が必要である: 例えば, 十分大きな $s > 0$ に対して, $\mathcal{L}_{F_U}(-s) < \infty$ なら十分. このような指数モーメントを持たないような裾の重い分布に対する近似に関しては, 例えば Embrechts *et al.* (2003) を参照されたい.

定数 $\gamma > 0$ は **調整係数** (adjustment coefficient) といわれ, Lundberg 型方程式:

$$l(s) := \log \mathbb{E}[e^{-s(R_1 - u)}] = 0 \quad (1.9)$$

の正の解である. 関数 $l(s)$ は, $R_1 - u$ の Laplace 変換に対する指数 (Laplace 指数) の形になっており, 調整係数は一意に決まることに注意しておこう. 特に, 古典的リスクモデル (1.1) の場合には, $l(s) = -\beta s - \lambda(1 - \mathcal{L}_{F_U}(-s))$ であり, 十分なモーメント条件と純益条件の下で, $l(0) = 0$; $l'(0) < 0$; $l''(s) > 0$; $l(s) \rightarrow \infty$ より $\gamma > 0$ の存在と一意性が導かれる. これらの諸結果については既に多くの成書があるが, Grandel (1991), Rolski *et al.* (1999), Asmussen (2000), Mikosch (2004) などが良い教科書であろう.

注意 1. 定数 $\delta \geq 0$ を用いて (1.9) を少し一般化した以下の方程式:

$$\ell(s) := l(-s) = \delta$$

は一般化 **Lundberg 方程式** と言われ、危険理論において本質的に重要となる。この方程式は一般に異なる 2 つの解 (負の解と非負解) を持つことが簡単な計算から分かるが、 $\delta = 0$ のときの負解が $-\gamma$ であることに注意しておこう。一方、非負解 $\varrho \geq 0$ は **Lundberg 指数** (*Lundberg exponent*) と言われ、後述する *Gerber-Shiu* 関数の解析において本質的な役割を果たす。特に、 $\delta = 0$ なら $\varrho = 0$ である。

1.2 Gerber-Shiu 関数

破産確率を拡張した概念の一つが破産の“深刻度”(severity)であり、数学的には、 $\tau(u)$: 破産時刻 (the time of ruin) と $|R_{\tau(u)}|$: 破産時損害額 (the deficit of ruin) の同時分布における $|R_{\tau(u)}|$ の周辺分布 (周辺リスク) である。この概念は、古典的リスクモデルの文脈で Gerber, Goovaerts, Kaas (1987) らによって導入され、さらに Dufresne and Gerber (1988), Dickson (1992) らにより $R_{\tau(u)-}$: 破産直前サージラス (the surplus prior to ruin) と $\tau(u)$ との同時分布による周辺リスクも“深刻度”の指標として研究された。その後、H. U. Gerber と E. S. W. Shiu による一連の共著論文 Gerber and Shiu (1997, 1998) において、 $(\tau(u), R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|)$ の同時分布に対する周辺リスクを拡張した概念として以下の (1.10) のようなリスク関数が考察された。この関数は、近年、危険理論の分野で大きな注目を集めており、彼らの名前にちなんで **Gerber-Shiu 関数** とも呼ばれている。

定義 1. リスク過程 $R = (R_t)_{t \geq 0}$ に対して、以下で定まるリスク関数 ϕ を期待割引罰則関数 (expected discounted penalty function) という:

$$\phi(u) := \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau(u)} w(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|) \mathbf{1}_{\{\tau(u) < \infty\}} \middle| R_0 = u \right]. \quad (1.10)$$

ここに、 $\tau(u)$ は (1.2) で与えられる破産時刻、 $\delta \geq 0$ は定数、 $\mathbf{1}_A$ は集合 A に対する定義関数、 $w(x, y)$ は $w_0 := w(0, 0) > 0$ を満たす \mathbb{R}_+^2 上の有界関数である。

関数 $w(x, y)$ は、破産直前のサージラス $R_{\tau(u)-}$ や破産時の損害額 $|R_{\tau(u)}|$ に対する広義の“罰則”と解釈され、それが“定数” $e^{-\delta \tau(u)}$ によって、破産時刻 ($t = \tau(u)$) から現在 ($t = 0$) へ割引率 δ で割り引かれていると見なせるため、このように呼ばれている。 w の有界性の仮定は議論や正則条件の単純化のためのもので、多くの論文で仮定されているが本質的ではない。この関数は、リスク過程 R を特に (1.1) に限定せず、一般のリスク過程に対して定義される。特に、 $w \equiv 1$, $\delta = 0$ とすると、 $\phi(u) = \psi(u)$: 破産確率 (1.3) となる。

2 Gerber-Shiu 関数の推定

本稿では以下のような拡散摂動モデル (ウィナー・ポアソンモデル) を考え、その Gerber-Shiu 関数の推定について論ずる。

$$R_t = u + \beta t - C_t + \sigma W_t; \quad C_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

ここに、 σ は正の定数で、 N は強度 λ をもつポアソン過程、 $\{U_i\}$ は N と独立で、分布 F_U をもつ IID 確率変数列、 W はウィナー過程である．このリスク過程に対する Gerber-Shiu 関数の Laplace 変換は、古典的モデルの自然な拡張により以下で与えられることが知られている (例えば、Tsai and Willmot, 2002):

$$\mathcal{L}\phi(s) = \frac{\mathcal{L}K(s) - \mathcal{L}K(\varrho) + w_0 D(\varrho - s)}{[\beta + D(s + \varrho)](\varrho - s) - \lambda[\mathcal{L}F_U(s) - \mathcal{L}F_U(\varrho)]}. \quad (2.1)$$

ただし、 $D := \sigma^2/2$, $K(x) := \lambda \int_x^\infty w(x, y - x) F_U(dy)$, であり、 ϱ は Lundberg 指数、すなわち、 $\ell(s) := \beta s - \lambda(1 - \mathcal{L}F_U(s)) + Ds^2 = \delta$ の解である．

2.1 $\mathcal{L}\phi$ に対する経験推定量 (拡散摂動モデルの場合)

我々は、 R の時間 $[0, T]$ におけるパスを時間連続的に観測できると仮定する．すなわち、任意の時点 $t \in [0, T]$ における R_t の値は既知であり、クレームサイズ $(U_1, U_2, \dots, U_{N_T})$ も特定可能であるとする．さらに、以下を仮定する:

- 純益条件: $\beta > \lambda\mu$, ただし、 $\mu := \mathbb{E}[U_1]$;
- 十分大きな $p > 0$ に対して、 $\int_0^\infty |u|^p F_U(du) < \infty$;
- 与えられた $\delta > 0$ に対し、ある既知の定数 $\underline{\varrho}, \bar{\varrho} > 0$ が存在して、 $\varrho \in (\underline{\varrho}, \bar{\varrho})$.

ここで注意すべきことは、上のような連続観測の下では、拡散係数 σ の値は、その局所的な 2 次変分を計算することで確定的に推定可能ということである:

$$\sum_{i=1}^m (R_{i/m} - R_{(i-1)/m})^2 - \sum_{i=1}^{N_1} U_i^2 \rightarrow \sigma^2 \quad a.s. \quad (m \rightarrow \infty).$$

したがって、以下では $\sigma > 0$ は既知として扱う．

さて、(2.1) における未知量 $\lambda, \mathcal{L}K, \mathcal{L}F_U$ を以下で推定する．

$$\widehat{\lambda} := \frac{N_T}{T}; \quad \widehat{\mathcal{L}F_U}(s) := \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} e^{-sU_i}; \quad \widehat{\mathcal{L}K}(s) := \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N_T} \int_0^{U_i} e^{-sx} w(x, U_i - x) dx.$$

また、 ϱ を以下で推定する．

$$\widehat{\varrho} := \arg \min_{s \in I} |\widehat{\ell}(s) - \delta|,$$

ただし、 $I := [\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$; $\widehat{\ell}(s) := \beta s - \widehat{\lambda}(1 - \widehat{\mathcal{L}F_U}(s)) + Ds^2$ であり、特に、 $\delta = 0$ のときは $\widehat{\varrho} = 0$ と定める．

注意 2. 上の推定量に対して、大数の法則によって以下のことが証明できる．

$$\widehat{\lambda} \rightarrow \lambda \quad a.s.; \quad \sup_{s \in I} |\widehat{\mathcal{L}F_U}(s) - \mathcal{L}F_U(s)| \xrightarrow{P} 0; \quad \sup_{s \in I} |\widehat{\mathcal{L}K}(s) - \mathcal{L}K(s)| \xrightarrow{P} 0. \quad (2.2)$$

さらに、中心極限定理により、 $T \rightarrow \infty$ のとき、

$$\widehat{\lambda} = \lambda + O_p(T^{-1/2}); \quad \widehat{\mathcal{L}F_U}(s) = \mathcal{L}F_U(s) + O_p(T^{-1/2}); \quad \widehat{\mathcal{L}K}(s) = \mathcal{L}K(s) + O_p(T^{-1/2})$$

となることも分かる．詳細は Shimizu (2009b), Theorems 3.2, 3.3 などを参照されたい．

注意 3. (2.2) により,

$$\sup_{s \in I} |\widehat{\ell}(s) - \ell(s)| \xrightarrow{P} 0,$$

となることが分かるので, M -推定の標準的な理論により, $\widehat{\varrho} = \varrho + O_p(T^{-1/2})$ が容易に示される; *Grandel (1991)*, あるいは *van der Vaart (1998)*, 5 章を参照のこと.

これらの推定量を用いて, $\mathcal{L}\phi$ の推定量を,

$$\widehat{\mathcal{L}\phi}(s) := \frac{\{\widehat{\mathcal{L}K}(\widehat{\varrho}) - \widehat{\mathcal{L}K}(s)\} + w_0 D(s - \widehat{\varrho})}{(\beta + D(s + \widehat{\varrho}))(s - \widehat{\varrho}) + \widehat{\lambda}\{\widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(s) - \widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(\widehat{\varrho})\}}$$

のように定めれば, これは $\mathcal{L}\phi$ の一致推定量になっている. すなわち, 各 $s \in I$ に対して, $\widehat{\mathcal{L}\phi}(s) \xrightarrow{P} \mathcal{L}\phi(s)$.

2.2 正則化 Laplace 逆変換による ϕ の推定

前節で $\mathcal{L}\phi$ の一致推定量を構成できたので, あとは $\mathcal{L}\phi$ に対する Laplace 逆変換 \mathcal{L}^{-1} を施せば,

$$\mathcal{L}^{-1}\widehat{\mathcal{L}\phi}(s) \xrightarrow{P} \phi(s)$$

となることが期待される. しかし, 話はそう単純ではない.

一般に, Laplace 変換 \mathcal{L} は L^2 上の有界作用素 ($\|\mathcal{L}\| = \sqrt{\pi}$) であり L^2 からそれ自身への単射にはなっているが, 全射ではなく, \mathcal{L}^{-1} は非有界であることが知られている. このことが, \mathcal{L}^{-1} の連続性を保障しない. すなわち, $g_n \rightarrow \mathcal{L}f$ なる関数列に対して, $\mathcal{L}^{-1}g_n \rightarrow f$ が必ずしも保障されない. これは典型的な不適切問題 (ill-posed problem) として知られている; *Carroll et al. (1991)*, *Vapnik (2006)* など. この問題を回避するために, *Chauveau et al. (1994)* で与えられた “正則化” Laplace 逆変換を用いる.

定義 2. $m > 0$ を定数とする. 関数 $g \in L^2$ に対して, 正則化 Laplace 逆変換 $\mathcal{L}_m^{-1} : L^2 \rightarrow L^2$ を以下で定める:

$$\mathcal{L}_m^{-1}g(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_m(y) y^{-1/2} e^{-tvy} g(v) dv dy; \quad t > 0.$$

ここに,

$$\Psi_m(y) = \int_0^{a_m} \cosh(\pi x) \cos(x \log y) dx; \quad a_m := \pi^{-1} \cosh^{-1}(\pi m)$$

である.

Chauveau et al. (1994) によれば, 各 $m > 0$ に対して $\|\mathcal{L}_m^{-1}\| \leq m\|\mathcal{L}\| = \sqrt{\pi}m$ で L^2 上の有界作用素となり, これが正則化の意味である. 任意の $f \in L^2$ に対して,

$$\|\mathcal{L}_m^{-1}\mathcal{L}f - f\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

となり, “正則化パラメータ” m を十分大きくとることで, 逆変換が定義される.

さて, 正則化逆変換 \mathcal{L}_m^{-1} は L^2 上の写像として定義されたが, 一般に L^2 -関数でないものも扱えるように, *Mnatsakanov et al. (2008)* のアイデアを借り, 一つのデバイスを用意しておく.

関数 G は \mathbb{R}_+ 上で微分可能とし、定数 $\vartheta \geq 0$ に対して、次のようにおく。

$$G_\vartheta(u) := e^{-\vartheta u} G(u); \quad g_\vartheta(u) := \frac{\partial}{\partial u} G_\vartheta(u),$$

また、 $\mathcal{L}G$ の時刻 T までの観測に基づく推定量を $\widehat{\mathcal{L}G}$ とかき、 $\mathcal{L}G_\vartheta$ の推定量を以下のように定める。

$$\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta(s) := \widehat{\mathcal{L}G}(s + \vartheta) \quad a.s. \quad (2.3)$$

実際、 $\mathcal{L}G_\vartheta(s) = \mathcal{L}G(s + \vartheta)$ となることから、上の定義は自然であろう。もしも、 $s \rightarrow 0$ や $s \rightarrow \infty$ のとき、 $\widehat{\mathcal{L}G}(s) = O(s^{-1})$ であれば(実際、 $\widehat{\mathcal{L}\psi}(s)$ などはこの場合である)、任意の $\vartheta > 0$ に対して $\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta \in L^2$ となり、 \mathcal{L}_m^{-1} が適用できる状況となる。以上の記法を用いて、

$$\widehat{G}_m^\vartheta(u) := e^{\vartheta u} \mathcal{L}_m^{-1} \left(\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta \right) (u), \quad (2.4)$$

のように定めると、これは G 自身の“良い”推定量になっていることが期待される。実際、以下の補題を得る。

補題 1 (Shimizu, 2010a). 関数 $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は 1 階導関数 g を持ち、 G, g は高々多項式増大とする。また、(2.3) で与えられる $\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta$ が、ある実数列 $\gamma_T \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) に対して、以下を満たすとする：

$$\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta \in L^2; \quad (2.5)$$

$$\left\| \widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta - \mathcal{L}G_\vartheta \right\|_{L^2} = O_p(\gamma_T^{-1}). \quad (2.6)$$

このとき、(2.4) で定義される $\widehat{G}_{m(T)}^\vartheta$ は以下を満たす：任意の正数列 K_T と数列 $m(T) = O(\gamma_T(\log \gamma_T)^{-1/2})$ に対して

$$\int_0^{K_T} |\widehat{G}_{m(T)}^\vartheta(s) - G(s)|^2 ds = O_p(e^{\vartheta K_T} (\log \gamma_T)^{-1/2}).$$

今、Gerber-Shiu 関数の推定量を

$$\widehat{\phi}_T^\vartheta(u) := e^{\vartheta u} \mathcal{L}_{m(T)}^{-1} \left(\widehat{\mathcal{L}\phi}_\vartheta \right) (u). \quad (2.7)$$

で定める。このとき、補題 1 を直接適用することによって以下の定理を得る。

定理 1 (Shimizu, 2010a). Gerber-Shiu 関数 $\phi(u)$ の導関数 ϕ' と、罰則関数 w が以下の条件を満たすとする：ある定数 $C > 0$ に対して、

$$|\phi'(x)| + \left| \int_0^\infty w(x, dy) \right| \leq C(1 + |x|^C).$$

さらに、定数 $\vartheta > 0$ を $(\beta - \lambda\mu)\vartheta > \delta$ を満たすように取るとする。このとき、数列 $m(T)$ を $m(T) = O(\sqrt{T/\log T})$ ($T \rightarrow \infty$) と選ぶことによって、以下の (i)、(ii) が成り立つ：

(i) 任意の $K > 0$ に対して、

$$\int_0^K |\widehat{\phi}_T^\vartheta(u) - \phi(u)|^2 du = O_p((\log T)^{-1}) \quad (T \rightarrow \infty).$$

(ii) $\vartheta \in (0, 1/2)$ と取れるならば,

$$\int_0^{\log \log T} |\hat{\phi}_T^\vartheta(u) - \phi(u)|^2 du = O_p((\log T)^{2\vartheta-1}) \quad (T \rightarrow \infty).$$

この定理は、推定量 $\hat{\phi}_T^\vartheta(u)$ がある種の L^2 -ノルムについて弱一様性を持っていることを示している。

注意 4. 定理では (2.7) のように $\vartheta > 0$ による推定量の正則化を行っているが、実は $\widehat{\mathcal{L}}\phi \in L^2$ であり、この正則化は補題 1 の (2.5) のためのものではない。上の定理の証明では、 $\vartheta = 0$ のとき条件 (2.6) の確認が困難であり、 $\vartheta > 0$ とすると容易になる。したがって、 $\vartheta > 0$ と取ることは、必ずしも本質的でないかもしれないことに注意しておく。

注意 5. ϑ に関する条件: $(\beta - \lambda\mu)\vartheta > \delta$ は、 λ, μ が未知であるから直接は確認できないが、現実的には、 $(\beta - \widehat{\lambda}\widehat{\mu})\vartheta > \delta$ となるように、 ϑ は “十分大きく” 選ばれるべきであろう。十分なサンプル数の下では、大数の法則と純益条件によって上記の条件が満足される。また、定理 1 より、推定量 $\hat{\phi}_T^\vartheta(u)$ の (i) の意味での収束率は ϑ によらないことに注意すると、 ϑ を大きく選ぶことは、漸近的には問題はない。

注意 6. *Chauveau et al. (1994)*, (3.6) によると、 $\hat{\phi}_T^\vartheta(u)$ は、次のように陽な積分表現で書くことができる:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_T^\vartheta(u) &= \frac{e^{\vartheta u}}{\pi^2} \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-uxy} \Phi_T(y) \widehat{\mathcal{L}}\phi(x + \vartheta) dx dy \\ &= \frac{e^{\vartheta u}}{\pi^2} \int_0^\infty (\mathcal{L}\Phi_T)(ux) \widehat{\mathcal{L}}\phi(x + \vartheta) dx. \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Phi_T(y) &= \frac{\pi \sinh(\pi r_T) \cos(r_T \log y) + \log y \cosh(\pi r_T) \sin(r_T \log y)}{\sqrt{y} \{\pi^2 + (\log y)^2\}}; \\ r_T &:= \pi^{-1} |\cosh^{-1}(\pi m(T))| = \pi^{-1} \log \left(\pi m(T) + \sqrt{\pi^2 m^2(T) - 1} \right). \end{aligned}$$

2.3 その他の推定法について

本稿では、主にノンパラメトリックな推定法について述べたが、もちろんパラメトリックなアプローチも考えられる。レヴィ測度にパラメトリックモデルを与え、パラメータに推定値を代入してしまえば、あとは解析的な Laplace 逆変換や高速フーリエ変換などを利用した数値的 Laplace 逆変換を用いたり、DRE のような積分方程式を数値的に解くことによって ϕ を求めることができる。しかしながら、Gerber-Shiu 関数はクレーム分布の裾の挙動に大きく依存しており、有限サンプルに基づく推定では、その最大値を超える (サンプルの無い) 部分の裾確率に対するパラメトリックモデルを与えることは実際には難しい問題である。また、モデルの誤特定 (misspecification) という普遍的な問題もあり、クレーム分布にモデルを与えないノンパラメトリック法の提案は無意味ではないであろう。ただし、ノンパラメトリック・アプローチでは誤特定の問題を回避する代わりに、データの無い裾部分については極めて “保守的” な推定しかしないので、結局、両者のアプローチには一長一短があるといわざるを得ない。

一方, Laplace 変換公式に基づく推定法だけでなく, Bening and Korolev (2002) らが破産確率を推定したように, Pollaczek-Khinchin 型公式を利用した推定も考えられる. すなわち, (1.5) の級数を適当な $M_T \in \mathbb{N}$ までの有限和で近似し,

$$\widehat{\phi}_T(u) = \widehat{H} * \sum_{k=0}^{M_T} \widehat{g}^{*k}(u)$$

なる推定量を考えることである. 特に, Bening and Korolev (2002) による破産確率推定量の収束率は標準的な \sqrt{T} -オーダーを達成しており, 前節のような対数オーダーよりもはるかに良好な推定量が提案されていることから, 統計的推測の意味では, Laplace 変換に基づいた推定よりも将来的な期待が持てるかも知れない. しかし, $M_T \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) の発散のレートの問題や, 畳み込みによる多重積分の収束評価, あるいは数値的な近似といった問題も残る. これらについては未解決の課題である.

2.4 Gerber-Shiu 関数の拡張について

Gerber-Shiu 関数は (1.10) の形で初めて考察されたのであるが, 最近では, その様々な方向への拡張が試みられている. 例えば, Biffis and Kyprianou (2010) や, Biffis and Morales (2010) 等によって, リスク過程 R のパス依存型 Gerber-Shiu 関数:

$$\bar{\phi}(u) := \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau(u)} w \left(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|, \inf_{t \leq \tau(u)-} R_t \right) \mathbf{1}_{\{\tau(u) < \infty\}} \middle| R_0 = u \right] \quad (2.8)$$

(ただし, w は \mathbb{R}^3 上の有界関数) がレヴィ過程によるリスクモデル (レヴィ・リスク過程) に対して議論されており, その DRE も導出されている. レヴィ・リスクモデルに対する古典的 Gerber-Shiu 関数 (1.10) の推定については, Shimizu (2010b) がある.

また, 本論文では, 無限境界型 (infinite horizon) の破産確率 (1.3) の拡張として Gerber-Shiu 関数を紹介したが, 危険理論でのもう一つの重要なトピックである有限境界型 (finite horizon) の破産確率 $\psi(u, T) := \mathbb{P}\{\tau(u) \leq T\}$ の拡張として, 有限境界型 Gerber-Shiu 関数

$$\phi(u, T) := \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau(u)} w \left(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|, \inf_{t \leq \tau(u)-} R_t \right) \mathbf{1}_{\{\tau(u) \leq T\}} \middle| R_0 = u \right] \quad (2.9)$$

を考えることもできる. これに関する研究はあまり進展がなく, 筆者の知る限り Morales and Zuznetsov (2010) らの研究がある程度である. その一因は解析の困難さにあるであろう. 実際, 古典的モデルに対する $\psi(u, T)$ の場合でも, DRE に類似の等式は成り立つが漸化式型の等式となるため (e.g., Rolski *et al.*, 1999, Theorem 5.6.2), 本論文のような議論を直接適用することは難しい. Morales and Zuznetsov (2010) らは, いくつかの特別な罰則と特別なリスク過程に対して, そのような等式表現を介さずに (2.9) の級数表現を与えている.

Gerber-Shiu 関数のパス依存型拡張として別の方向へのものがある. Cai *et al.* (2009) は, ポアソン型クレームのリスクモデルに対して, クレーム支払い等にかかるオペレーティング・コストまで含めて考察する目的で, 以下のような関数を導入した:

$$H_l(u) := \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau(u)} e^{-\delta t} l(R_s) dt \middle| R_0 = u \right]. \quad (2.10)$$

関数 l をうまくとると, 適当な正則条件下で $H_l \equiv \phi$ となることが分かり (Cai *et al.*, 2009, Proposition 3.1), (2.10) は Gerber-Shiu 関数 (1.10) の一つの拡張になっている. ただし, こ

の形式では (2.8) を含まないことに注意しておく．さらに, Feng and Shimizu (2010) では, レヴィ・リスク過程に対して, 上記 H_t の DRE を導いており, H_t に対する推測には本論文の手法がそのまま適用可能であろう．

更にごく最近の話題として, Gerber-Shiu 関数のダイナミックな拡張も話題になっている． ϕ は初期値を与えた下での非確率的な関数として与えられているが, Garrido (2010) は, これを現在時刻 t で条件付けることにより, **Gerber-Shiu 過程**

$$\phi_t(u) := \mathbb{E} \left[e^{-\delta \tau(u) \vee t} w \left(R_{(\tau(u) \vee t)-}, |R_{\tau(u) \vee t}| \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.11)$$

を提案した．ただし, $\mathcal{F}_t := \sigma(R_s; s \leq t)$ である．もともと保険数理では, 破産確率に対して, VaR などの短期的なリスク指標とは異なる長期的リスク指標としての利用可能性が議論されてきたという経緯があるが, その拡張として Gerber-Shiu 過程がより動的なリスク管理に応用できるのではないかと期待されており, 今後の研究が待たれている．

参考文献

- [1] Asmussen, S. (2000). *Ruin probability*, World Scientific, Singapore.
- [2] Biffis, E. and Kyprianou, A. E. (2010). A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk process, *Insurance: Mathematics and Economics*, **46**, 85–91.
- [3] Biffis, E. and Morales, M. (2010). On a generalization of the Gerber-Shiu function to path dependent penalties, *Insurance: Mathematics and Economics*, **46**, 92–97.
- [4] Beekman, J. A. (1969). A ruin function approximation. *Transactions of Society of Actuaries*, **21**, 41–48; 275–279.
- [5] Bening, V. E. and Korolev, V. Yu. (2002). Nonparametric estimation of the ruin probability for generalized risk processes, *Theory of Probability and Its Applications*, **47**, no. 1, 1–16.
- [6] Cai, J., Feng, R. and Willmot, G. E. (2009). On the expectation of total discounted operating costs up to default and its applications, *Advances in Applied Probability*, **41**, no. 2, 495–522.
- [7] Carroll, R. J., Vanrooij, A. C. M. and Ruymgaart, F. H. (1991). Theoretical aspects of ill-posed problems in statistics, *Acta Applicandae Mathematicae*, **24**, 133–140.
- [8] Chauveau, D. E., van Rooij, A. C. M. and Ruymgaart, F. H. (1994). Regularized inversion of Noisy Laplace transforms, *Advances in Applied Mathematics*, **15**, 186–201.
- [9] Dickson, D. C. M. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **11**, no. 3, 191–207.
- [10] Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1988). The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **7**, no. 3, 193–199.
- [11] Garrido, J. (2010). Five easy pieces on Gerber-Shiu analysis, 3rd. International Gerber-Shiu workshop, University of Waterloo, June 14–16.
- [12] Gerber, H. U.; Goovaerts, M. J. and Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin, *ASTIN Bulletin*, **17**, no.2, 151–163.
- [13] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1997). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, no. 2, 129–137.
- [14] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin; with discussion and a reply by the authors. *North American Actuarial Journal*, **2**, no. 1, 48–78.
- [15] Grandell, J. (1979). Empirical bounds for ruin probabilities, *Stochastic Processes and their Applications*, **8**, 243–255.
- [16] Grandell, J. (1991). *Aspects of risk theory*, Springer-Verlag, New York.

- [17] Mikosch, T. (2004). *Non-life insurance mathematics. An introduction with stochastic processes*, Springer-Verlag, Berlin.
- [18] Morales, M. and Zuznetsov, A. (2010). On the finite-time Gerber-Shiu function for three new Levy insurance risk processes, 3rd. International Gerber-Shiu workshop, University of Waterloo, June 14–16.
- [19] Mnatsakanov, R., Ruymgaart, L. L. and Ruymgaart, F. H. (2008). Nonparametric estimation of ruin probabilities given a random sample of claims, *Mathematical Methods of Statistics*, **17**, no. 1, 35–43.
- [20] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.
- [21] Shimizu, Y. (2009a). A new aspect of a risk process and its statistical inference, *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**, no. 1, 70–77.
- [22] Shimizu, Y. (2009b). Functional estimation for Levy measures of semimartingales with Poissonian jumps, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, no. 6, 1073–1092.
- [23] Shimizu, Y. (2010a). Nonparametric estimation of the Gerber-Shiu function for the Winer-Poisson risk model, *to appear in Scandinavian Actuarial Journal*.
- [24] Shimizu, Y. (2010b). Estimation of the Gerber-Shiu function for a Lévy insurance risk process from certain discrete data, Research Report Series 10-05, Department of Mathematical Science, Osaka University: available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1622924>.
- [25] Tsai, C. C. and Willmot, G. E. (2002). A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics and Economics*, **30**, no. 1, 51–66.
- [26] Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2001). *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications*, Springer-Verlag, New York.
- [27] van der Vaart, A. W. (1998). *Asymptotic statistics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [28] Vapnik, V. (2006). *Estimation of dependences based on empirical data*, Springer, New York.

発行日	2010 年 11 月 30 日
編集責任	加藤 剛（山形大学）
