

Rank-based inference for multivariate nonlinear and long-memory time series models

Junichi Hirukawa*, Hiroyuki Taniai†, Marc Hallin‡ and Masanobu Taniguchi§

長期記憶型非線形モデル 本研究では、投資対象となる金融資産を「国内債券、外国債券、国内株式、外国株式、短期資産」の5種類に限定する。各資産共に非線形な時間従属性があることが知られている。また、国内株式、外国株式については、インデックス運用を想定するが、株式のインデックスについては、長期記憶性があることが知られている。

Table 1: モデルの仮定

資産クラス	短期性/長期性	仮定するモデル
国内株式 外国株式	長期記憶性	非線形モデル
国内債券 外国債券 短期資産	短期記憶性	非線形モデル

従って、5つの金融資産の全てを恣意的な解釈を用いることなくモデル化するためには、長期記憶性を持った非線形多変量モデルを構築することが必要となる。

金融時系列の実証分析において、最も有名なモデルは GARCH (p, q) モデルであるが、このモデルにおいては ARCH (∞) 表現した時の AR 係数が指数関数的に（非常に速く）減衰するモデルになっている。このことは、収益率過程の現在の値に対する過去の値からの影響が非常に速く減衰することを表しており、モデルが短期記憶型であることが分かる。GARCH (p, q) モデルを含む一般化されたモデルとして ARCH (∞) モデルが考えらる。しかしながら、このモデルにおいてもモデルの定常性の条件から、AR 係数の絶対総和可能性が要請され、長期

*Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, 8050 Ikarashi 2-no-cho, Nishi-ku, Niigata City, Niigata 950-2181, Japan

†School of International Liberal Studies, Waseda University, 1-6-1 Nishi-Waseda, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8050 Japan

‡Institut de Recherche en Statistique, ECARES, Université libre de Bruxelles, CP 114, B-1050, Bruxelles, Belgium, ORFE, Princeton University, CentER, University of Tilburg, and ECORE. Supported by the Sonderforschungsbereich “Statistical modelling of nonlinear dynamic processes” (SFB 823) of the Deutsche Forschungsgemeinschaft, and by a Discovery Grant of the Australian Research Council.

§Department of Applied Mathematics, School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8555 Japan.

記憶性を持つモデルを含むことができない。(長期記憶性に限りなく近づくことはできることから「中間の減衰」と呼ばれることもある。

以上のことから、通常の ARCH 型のモデルでは長期記憶性を表現できないことがわかる。近年、これらの問題を解消するモデルとして、線形 (Linear) ARCH (∞) モデル (LARCH (∞) モデル) が提案された。LARCH (∞) モデルの定常性の条件は ARCH (∞) モデルの定常性の条件よりも緩いことが分かる。即ち、AR 係数の絶対総和可能性は必ずしも必要とされない。AR 係数を適切に設定すると、LARCH モデルに含まれる非線形長期記憶型モデルを定義することができる。

分布型にロバストなモデル推測 n 個の観測系列を小さい方から大きさ順に並べ替えたものを順序統計量という。また、 i 番目の観測値が、小さい方から数えて何番目かを表わす量をランク (順位) 統計量という。順序統計量とランク統計量の組は、観測系列そのものと同じ情報量を持つ。即ち、ランク統計量は、観測系列から順序統計量の分だけ情報を損失する。一方で、ランク統計量は、分布についての知識を全く必要とせずに直ちに計算できるので、簡便で、ロバストな統計量である。そこで、ロバストな統計量であるランク統計量がどの程度情報を損失しているのかが問題となる。実際には、情報量損失は漸近相対有効性 (ARE) を用いて測られる。

2 標本位置母数問題において、最も簡便なランクに基づく統計量である Wilcoxon 検定統計量が、最も悪い場合で、標準的な統計量である Student 検定統計量よりも 13.6% 多い観測数を必要とする (最も良い場合には、Student 検定統計量はいくら観測数を増やしても Wilcoxon 検定統計量よりも性能が悪い) ことがわかる。更に、その改良版である van der Waerden 検定統計量 (あるいは、漸近同等な Exact スコアは、最も悪い場合でも、Student 検定統計量と同じ漸近性能を持つ (しかも、最も悪い場合は正規分布の時に限られる) ことがわかる。

上記は、独立同一標本の場合の議論であったが、同様の手法が時間相関構造を持つ時系列モデルにも自然に拡張される。実際に、局所漸近正規 (LAN) 性が成り立つモデルにおいて、“Central Sequence” をランク統計量の張る空間に射影することによって、ランクに基づく「セミパラメトリック有効」を得る。ランクに基づく「セミパラメトリック有効」の具体的表現が与えられ、最終的に、ランクに基づく “Influence function” が求まる。 θ に関する「漸近有効な推測」は、この “Influence function” に基づいて達成される。

以上、まとめると、ランク統計量は分布に依存しない性質 (distribution-freeness) と有効性 (efficiency) の両方を満たすという望ましい性質を持つ。そこで、「何がランク統計量を有効的にしているのか?」といった疑問が浮かぶが「ランク統計量の極大不変性」により、接空間への射影を与え、セミパラメトリック有効性を実現可能にしていることが分かる。

多変量分布におけるランク統計量 ここまでは、単変量の時系列に対するランク推定の議論であったが、本研究では 5 つの金融資産を運用の対象とするので、多変量時系列に対するランク推定の議論が必要となる。単変量の場合には、各標本の大小関係は自明であったが、多変量の場合にはそうではない。例えば、 $X_1 < X_2$ かつ $Y_1 > Y_2$ の場合には (X_1, Y_1) と (X_2, Y_2) の大小関係をそのままでは定義できない。従って、モデルを楕円型の分布に限定して、標準化した観測のランクを考える。このとき、多変量符号付きランク統計量を与えることができる。