

「多変量モデル・時系列モデルにおける統計的推測の理論と応用」に関する研究報告

鹿児島大学大学院 理工学研究科 近藤正男

1. 研究目的

本研究では、多変量解析、時系列解析とその関連分野のモデル、およびその統計的推測に関して、理論及び応用の両面から報告し研究を行うことを目的とした。

2. 研究計画

この研究は平成21年度に下記の研究集会を行い、その後研究者間で情報交換を行うことにより遂行された。その研究成果を研究報告集としてまとめた。

研究集会：多変量モデル・時系列モデルにおける統計的推測の理論と応用

開催責任者：近藤正男(鹿児島大学大学院理工学研究科)

種市信裕(鹿児島大学大学院理工学研究科)

期 日：平成21年12月3日(木)～12月5日(土)

参加人数：32名

場 所：鹿児島大学理学部(理系先端研究棟 大会議室)

3. 研究成果

研究集会において16件の報告が行われ、各報告に対して活発な質疑応答がなされた。

講演内容は

- (1) ロジスティック回帰分析の検定統計量の分布の漸近展開と新たな検定統計量の提案
- (2) 2-Step単調欠測データの下で平均ベクトルに対するホテリング T^2 型統計量を与え、その漸近分布について議論し、その平均ベクトルの成分間に対する同時信頼区間を与えた。
- (3) 代表的な非線形時系列モデルに対して、条件付き最小二乗推定量と推定関数推定量を用いてその有効性について論じた。
- (4) 時系列モデルにおける変化点問題の経験尤度比を用いたアプローチによる考察
- (5) Superposed Neyman-Scott cluster fieldsにおけるパラメータ推定について
- (6) 時変 ARCH(p) 過程の場合の最適化ポートフォリオ推定量について
- (7) 四分相関係数の分布に関する漸近展開について
- (8) Spectral Magic
- (9) On approximations for power-divergence family of statistics
- (10) 局所定常過程をイノベーション過程に持つ単位根過程や単位根接近モデルの汎関数中心極限定理について
- (11) The method of simulated quantiles

- (1 2) A uniform Berry-Esseen bound for M-estimators for geometrically ergodic Markov chain
- (1 3) On testing for symmetry in skew-normal families
- (1 4) 折れ線回帰分析を用いたパーセンタイル値の推定方法について
- (1 5) カーネル法を用いた判別分析について
- (1 6) ブラウン運動上の統計量について

なお、講演者および講演題目は以下の通りである。

種市信裕（鹿児島大学）、関谷祐里（北海道教育大学）、外山淳（北海道大学）：「ロジスティック回帰分析の検定統計量の分布の漸近展開」

世古規子（サノフィ・アベンティス（株））、山崎 彰子（東京理科大学）、瀬尾 隆（東京理科大学）：「2-Step 単調欠測データにおける平均ベクトルの検定と同時信頼区間」

天野友之（早稲田大学）：「Asymptotic efficiency of estimating function estimators for nonlinear time series models」

庄司直史（東京理科大学）、小方浩明（首都大学東京）、玉置健一郎（早稲田大学）、塩濱敬之（東京理科大学）：「Empirical likelihood ratio test of the change-point problem for stationary processes」

田中 潮（統計数理研究所）：「On parameter estimation based on the contact distance for certain superposed Neyman-Scott cluster fields」

白石博（東京慈恵会医科大学）：「Resampling Procedure in estimation of Optimal Portfolios for Time-Varying ARCH Processes」

小笠原春彦（小樽商科大学）：「四分相関係数の分布に関する漸近展開」

David Stoffer（Univ. Pittsburgh）：「Spectral Magic」

Vladimir Ulyanov（Moscow State Univ.）：「On approximations for power-divergence family of statistics」

Junichi HIRUKAWA（Niigata Univ.）：「On the asymptotic property of unit root process generated by locally stationary processes」

David Veredas（Univ. Libre Bruxelles）：「The method of simulated quantiles」

Valentin Patilea（IRMAR-INSa and CREST-Ensai, Rennes）：「A uniform Berry-Esseen bound for M-estimators for geometrically ergodic Markov chain」

Marc Hallin（Univ. Libre Bruxelles）：「On testing for symmetry in skew-normal families」

稲葉太一（神戸大学）：「パーセンタイル値の推定を目的とした折れ線回帰分析のアルゴリズム」

今井英幸（北海道大学）、田中章（北海道大学）、池田盛一（釧路工業高等専門学校）：「カーネル法を用いた判別分析の誤判別率について」

三浦良造（一橋大学）：「ブラウン運動上の統計量とエキゾチックオプション」

ロジスティック回帰分析の検定統計量の分布の漸近展開

鹿児島大学・理工 種市信裕
北海道教育大学・釧路 関谷祐里
北海道大学・情報 外山 淳

概要：ロジスティック回帰モデルのデータに対する適合度を評価する方法として，deviance 統計量や Pearson X^2 -統計量を用いた適合度検定がある．これらの検定統計量をさらに一般化したものとして， ϕ -ダイバージェンス統計量 C_ϕ の族がある．すべての C_ϕ は，ロジスティックモデルが正しいという帰無仮説のもとで，漸近的に χ^2 分布に従う．本報告では，帰無仮説のもとでの C_ϕ の分布の漸近展開に基づく近似を与えた．さらに，その漸近展開における連続項を用いることにより，標本数がそれほど大きくない場合であっても極限 χ^2 分布による近似が適用できるような新たな検定統計量を提案した．

一般線形モデル (Nelder and Wedderburn [3]) を 2 項分布 $B(n, \pi)$ ，すなわち，

$$\Pr\{Y = y\} = \binom{n}{y} \pi^y (1 - \pi)^{n-y}, \quad (y = 0, 1, \dots, n)$$

について考える． N 個の異なるサブグループにおける反応数に対応した確率変数 Y_α , ($\alpha = 1, \dots, N$) が互いに独立に二項分布 $B(n_\alpha, \pi_\alpha)$, ($\alpha = 1, \dots, N$) に従うとし，その連結関数を正準連結関数であるロジット関数 $\text{logit } \pi = \log\{\pi/(1 - \pi)\}$ で与えると，一般ロジスティック回帰モデル（一般ロジットモデル）

$$\text{logit } \pi_\alpha = \mathbf{x}'_\alpha \boldsymbol{\beta}, \quad (\alpha = 1, \dots, N) \quad (1)$$

が得られる．ただし， $\mathbf{x}_\alpha = (x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha p})'$, ($p < N$) は共変量ベクトル， $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ はパラメータベクトルとする．特に， $p = 2$, $x_{\alpha 1} = 1, x_{\alpha 2} = x_\alpha$, ($\alpha = 1, \dots, N$) とすると，用量反応モデルとして用いられるロジットモデル

$$\text{logit } \pi_\alpha = \beta_1 + \beta_2 x_\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

となる． $\boldsymbol{\beta}$ の最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p)'$ ，さらに $\hat{\pi}_\alpha = \pi_\alpha(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, ($\alpha = 1, \dots, N$) とする．ここで， ϕ -ダイバージェンス統計量 [5]

$$C_\phi = 2 \sum_{\alpha=1}^N n_\alpha \left\{ \hat{\pi}_\alpha \phi \left(\frac{\frac{Y_\alpha}{n_\alpha}}{\hat{\pi}_\alpha} \right) + (1 - \hat{\pi}_\alpha) \phi \left(\frac{1 - \frac{Y_\alpha}{n_\alpha}}{1 - \hat{\pi}_\alpha} \right) \right\} \quad (2)$$

の族を考える．ただし， $\phi(t)$ は $t > 0$ における実数値凸関数で， $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ かつ $\phi''(1) = 1$ を満たすものとする．関数 ϕ として特に

$$\phi_a(t) = \begin{cases} \{a(a+1)\}^{-1} \{t^{a+1} - t + a(1-t)\} & (a \neq 0, -1) \\ t \log t + 1 - t & (a = 0) \\ -\log t - 1 + t & (a = -1) \end{cases}$$

を選ぶと，統計量 C_ϕ はパワーダイバージェンス統計量 [1]

$$R^a = 2 \sum_{\alpha=1}^N n_\alpha \left\{ I^a \left(\frac{Y_\alpha}{n_\alpha}, \hat{\pi}_\alpha \right) + I^a \left(1 - \frac{Y_\alpha}{n_\alpha}, 1 - \hat{\pi}_\alpha \right) \right\} \quad (3)$$

となる．ただし，

$$I^a(e, f) = \begin{cases} \{a(a+1)\}^{-1} e \left\{ \left(\frac{e}{f} \right)^a - 1 \right\} & (a \neq 0, -1) \\ e \log \left(\frac{e}{f} \right) & (a = 0) \\ f \log \left(\frac{f}{e} \right) & (a = -1) \end{cases}$$

である．すべての ϕ -ダイバージェンス統計量 C_ϕ は，条件

$$n_\alpha / N_T \rightarrow \mu_\alpha \quad (0 < \mu_\alpha < 1) \text{ for each } \alpha, \quad \text{as } N_T \rightarrow \infty \quad (4)$$

ただし， $N_T = \sum_{\alpha=1}^N n_\alpha$ を満たすとき，帰無仮説

$$H_0 : (1) \text{ で与えられるモデルは正しい} \quad (5)$$

のもとで漸近的に自由度 $N - p$ の χ^2 分布に従う．このことを用いてロジスティック回帰モデルの適合度検定をおこなうことができる．通常， R^0 (deviance 統計量) や R^1 (Pearson X^2 -統計量) が用いられる．

本報告では，帰無仮説 (5) のもとでの検定統計量 C_ϕ の分布の漸近近似について Yarnold [4] の考え方に従い考察をおこない，

$$\Pr\{C_\phi \leq x | H_0\} \approx J_1^* + J_2^*$$

という近似を考えた．ここで， J_1^* は連続分布を仮定した多変量エッジワース展開の項であり， J_2^* は不連続性を考慮した離散項である． J_1^* は，

$$J_1^* = \Pr\{\chi_{N-p}^2 \leq x\} + \frac{1}{N_T} \sum_{j=0}^3 v_j^\phi \Pr\{\chi_{N-p+2j}^2 \leq x\} + o(N_T^{-1}) \quad (6)$$

という形式で評価される．ここで， χ_f^2 は自由度 f のカイ二乗分布に従う確率変数を表す．また， J_2^* は，

$$J_2^* = \left\{ (2\pi)^N \prod_{\alpha=1}^N \pi_\alpha (1 - \pi_\alpha) \right\}^{-1/2} (\Theta_1 + \Theta_2) - \Theta_3 + O(N_T^{-3/2}) \quad (7)$$

という形式で評価される．

次に，(6) の近似式を用いて， C_ϕ の帰無仮説 (5) のもとでの小標本における χ^2 近似をより改良する変換統計量 (e.g. Fujikoshi [2]) の構築をおこなった．

参考文献

- [1] Cressie, N. and Read, T. R. C.: *J. R. Statist. Soc. B*, **46** (1984), 440–464.
- [2] Fujikoshi, Y.: *J. Mult. Anal.* **72**, (2000), 249–263.
- [3] Nelder, J.A. and Wedderburn, R.W.M.: *J. R. Statist. Soc., A*, **135** (1972), 370–384.
- [4] Yarnold, J.K.: *Ann. Math. Statist.*, **43** (1972), 1566–1580.
- [5] Zografos, K., Ferentios, K. and Papaioannou, T.: *Commun. Statist. -Theory Meth.*, **19** (1990), 1785–1802.

2-Step 単調欠測データにおける平均ベクトルの検定と同時信頼区間

サノフィ・アベンティス（株） 世古 規子
東京理科大・理・院 山崎 彰子
東京理科大・理 瀬尾 隆

1. はじめに

本報告では、1 標本問題における 2-Step 単調欠測データの下での平均ベクトルの検定について考えている。欠測値の型が単調でない場合における 1 標本、2 標本、さらには k 標本問題に対する平均ベクトルの検定について、Srivastava (1985), Srivastava and Carter (1986), Shutoh et al.(2009) などの論文がある。これらの論文は、尤度方程式を数値反復法を用いて解くことによって、平均ベクトルと分散共分散行列の最尤推定量を求め、尤度比検定統計量を導出している。

2-Step 単調欠測データの下では、反復法によらない平均ベクトルや分散共分散行列の最尤推定量が Anderson and Olkin (1985) によって導出され、その漸近分布などが Kanda and Fujikoshi (1998) によって議論されている。また、2 標本問題への拡張した最尤推定量は、Shutoh, Hyodo and Seo (2009) によって与えられている。

本報告では、1 標本問題における 2-Step 単調欠測データの下で平均ベクトルに対するホテリング T^2 型統計量を与え、その漸近分布について議論した。さらに、その平均ベクトルの成分間に対する同時信頼区間を与えた。

2. 1 標本問題における平均ベクトルの検定

N_1 個の $p(= p_1 + p_2)$ 変量観測ベクトル $\mathbf{x}_j = (\mathbf{x}'_{1j}, \mathbf{x}'_{2j})'$, $(j = 1, \dots, N_1)$ が $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従い、 $N_2(= N - N_1)$ 個の p_1 変量観測ベクトル \mathbf{x}_{1j} , $(j = N_1 + 1, \dots, N)$ が $N_{p_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$ に従っているとする。ただし

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

である。このようなデータセットを 2-Step 単調欠測データと呼ぶ。

ここで、完全データ部分、不完全データ部分にデータセットを分割したときの標本平均ベクトル、標本分散共分散行列として以下の記号を用いた。

$$\bar{\mathbf{x}}^{(1)} = (\bar{\mathbf{x}}_1^{(1)'}, \bar{\mathbf{x}}_2^{(1)'})', \quad \bar{\mathbf{x}}^{(2)} = \frac{1}{N_2} \sum_{j=N_1+1}^N \mathbf{x}_{1j}$$

ただし

$$\bar{\mathbf{x}}_1^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{x}_{1j}, \quad \bar{\mathbf{x}}_2^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{x}_{2j}$$

とし

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)} &= \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{j=1}^{N_1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})' = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{(1)} & \mathbf{S}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{S}_{21}^{(1)} & \mathbf{S}_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}^{(2)} &= \frac{1}{N_2 - 1} \sum_{j=N_1+1}^N (\mathbf{x}_{1j} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})(\mathbf{x}_{1j} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})'. \end{aligned}$$

このとき、1 標本問題に対する平均ベクトルの検定問題、すなわち

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \text{ vs. } H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$$

を考える．ただし $\boldsymbol{\mu}_0$ は既知の定数ベクトルである．

Anderson and Olkin (1985) によって $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ に対する最尤推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} (N_1 \bar{\mathbf{x}}_1^{(1)} + N_2 \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \\ \bar{\mathbf{x}}_2^{(1)} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_1^{(1)} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_1) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} = \frac{1}{N} (\mathbf{W}_{11}^{(1)} + \mathbf{W}^{(2)}), \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{12} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} (\mathbf{W}_{11}^{(1)})^{-1} \mathbf{W}_{12}^{(1)}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} = \frac{1}{N_1} \mathbf{W}_{22 \cdot 1}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11}^{-1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{12}$$

で与えられている．ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(1)} &= (N_1 - 1) \mathbf{S}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11}^{(1)} & \mathbf{W}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{W}_{21}^{(1)} & \mathbf{W}_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{W}_{22 \cdot 1}^{(1)} &= \mathbf{W}_{22}^{(1)} - \mathbf{W}_{21}^{(1)} (\mathbf{W}_{11}^{(1)})^{-1} \mathbf{W}_{12}^{(1)}, \\ \mathbf{W}^{(2)} &= (N_2 - 1) \mathbf{S}^{(2)} + \frac{N_1 N_2}{N} (\bar{\mathbf{x}}_1^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) (\bar{\mathbf{x}}_1^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})' \end{aligned}$$

である．この最尤推定量を用いることにより，一標本問題に対する平均ベクトルの検定問題についての T^2 型統計量は

$$T^2 = (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0)' \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

となる．ただし， $\boldsymbol{\Gamma} = \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}})$ である．本報告では，帰無仮説 H_0 の下での T^2 型統計量の漸近分布について議論し，極限分布であるカイ二乗分布と F 分布を用いた近似値を与え，モンテカルロ・シミュレーションによりその数値的評価を行った．さらに， $\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対する同時信頼区間を与えた．

参考文献

- [1] Anderson, T. W. and Olkin, I. (1985). Maximum-likelihood estimation of the parameters of a multivariate normal distribution, *Linear Algebra and its Applications*, **70**, 147–171.
- [2] Kanda, T. and Fujikoshi, Y. (1998). Some basic properties of the MLE's for a multivariate normal distribution with monotone missing data, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **18**, 161–190.
- [3] Shutoh, N., Kusumi, M., Morinaga, W., Yamada, S. and Seo, T. (2009). Testing equality of mean vector in two sample problem with missing data, to appear in *Communications in Statistics – Simulation and Computation*.
- [4] Shutoh, N., Hyodo, M. and Seo, T. (2009) Expected probabilities of misclassification in linear discriminant analysis based on 2-Step monotone missing samples. *Technical Report 09-01, Statistical Research Group, Hiroshima University*.
- [5] Srivastava, M. S. (1985). Multivariate data with missing observations, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **14**, 775–792.
- [6] Srivastava, M. S. and Carter, E. M. (1986). The maximum likelihood method for non-response in sample survey, *Survey Methodology*, **12**, 61–72.

Asymptotic efficiency of estimating function estimators for nonlinear time series models

(早稲田大学基幹理工学部応用数理学科: 天野友之)

非線形時系列の代表的な推定量の一つとして Tjøstheim (1986) によって提案された条件付最小二乗推定量がある。この推定量は簡易な線形表現を持ち核心過程の情報がいないと言う利点がある。しかしながら一般的に漸近有効でない。このために Godambe の意味で漸近有効な推定関数推定量が Chandra and Taniguchi (2001) によって提案された。本報告ではまず代表的な非線形時系列モデルの一つである RCA モデルに対し条件付最小二乗推定量と推定関数推定量を用いその有効性について議論した。

[RCA モデル]

$$X_t = \sum_{j=1}^k (\theta_j + z_t(j)) X_{t-j} + \epsilon_t \quad (0.1)$$

$\{\epsilon_t\}$ は平均 0、分散 σ^2 、密度関数 $f(\cdot)$ の独立同一分布の確率変数列。

$$\{\mathbf{z}_t\} \equiv \begin{pmatrix} z_t(1) \\ \vdots \\ z_t(k) \end{pmatrix} \text{ は平均ベクトル } \mathbf{0}、\text{ 共分散行列 } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_k^2 \end{pmatrix}$$

の独立同一分布の確率ベクトル列。

確率過程 $\{\epsilon_t\}, \{z_t(1)\}, \dots, \{z_t(k)\}$ は互いに独立。

この RCA モデルに対する条件付最小二乗推定量は次の簡易な表現を持ち、

[RCA モデルに対する条件付最小 2 乗推定量]

$$\hat{\theta}_n^{(CL)} \equiv \arg \min_{\theta} \sum_{t=k+1}^n [X_t - E[X_t | F_{t-1}]]^2 \quad (0.2)$$

$$= \left(\sum_{t=k+1}^n \mathbf{X}_{t-1} \mathbf{X}_{t-1}' \right)^{-1} \left(\sum_{t=k+1}^n \mathbf{X}_{t-1} X_t \right) \quad (0.3)$$

F_{t-1} は観測列 X_{t-1}, X_{t-2}, \dots によって生成される σ 加法族。

$\mathbf{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-k})'$ 。

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ 。

更に正則条件のもと漸近正規性を持つ。

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(CL)} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{U}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{U}^{-1}) \quad (0.4)$$

$$\mathbf{U} = E[\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}].$$

$$\mathbf{W} = E[(X_t - \theta'\mathbf{X}_{t-1})^2\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}].$$

また推定関数推定量は次で与えられ、

[RCA モデルに対する推定関数推定量]

$$\hat{\theta}_n^{(G)} = \left(\sum_{t=k+1}^n \frac{\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}}{\phi_t} \right)^{-1} \left(\sum_{t=k+1}^n \frac{\mathbf{X}_{t-1}X_t}{\phi_t} \right) \quad (0.5)$$

$$\phi_t = \sigma^2 + \mathbf{X}'_{t-1}\Sigma\mathbf{X}_{t-1}.$$

更に正則条件のもと次の漸近正規性を持つ。

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(G)} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{V}^{-1}) \quad (0.6)$$

$$\mathbf{V} \equiv E\left[\left\{\mathbf{X}_{t-1}\mathbf{X}'_{t-1}\right\}var(X_t|\mathbf{X}_{t-1})^{-1}\right].$$

本報告では推定関数推定量と条件付最小二乗推定量の有効性について以下の定理を示した。

主定理:

- (i) 推定関数推定量が条件付最小二乗推定量より良い、すなわち行列の意味で不等式

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{U}^{-1} \geq \mathbf{V}^{-1} \quad (0.7)$$

が成立する。等号が成り立つための必要十分条件は、ある定数 c が存在して

$$var(X_t|\mathbf{X}_{t-1}) = c \quad (0.8)$$

$$(\mathbf{X}'_{t-1}\Sigma\mathbf{X}_{t-1} + \sigma^2 = c) \quad (0.9)$$

- (ii) 局所漸近正規性のもとでの、すなわち十分に広い正則な推定量のクラスの中での推定関数推定量の漸近有効性の十分条件は

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t \sim N(0, \Sigma) \\ \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \quad (0.10)$$

本報告では他の代表的な非線形時系列モデルである GARCH モデルや Non-linear AR モデルに対しても条件付最小二乗推定量と推定関数推定量を用いその有効性や興味ある知見を報告し、更に数値解析による知見も報告した。

Empirical Likelihood Ratio Test of the Change-Point Problem for Stationary Processes

庄司直史 / 東京理科大学

小方浩明 / 首都大学東京

玉置健一郎 / 早稲田大学

塩濱敬之 / 東京理科大学

1 はじめに

経済・金融時系列解析などにおいては、観測された期間すべてにおいて確率構造が不変であることは稀であり、それゆえ変化点を踏まえたモデリングは極めて重要な課題となっている。変化点問題は様々な研究者によって古くから議論されてきており、そのアプローチも多種多様である。今回は、独立データの変化点問題に対し経験尤度を用いた Zou et al. (2007) と、時系列モデルにおける変化点問題に対して周波数領域で解析した Picard (1985) や Giraitis and Leipus (1992) の結果を参考に、時系列モデルにおける変化点問題を経験尤度比を用いたアプローチによって考察する。具体的な目的は、変化点があるかないかを検定することであり、ある場合はそれがどこなのかを推定することである。また、簡単なシミュレーションも行う。

2 周波数領域における推定関数

X_1, \dots, X_n をスペクトル密度関数 $f(\omega)$, $\omega \in \Pi = [-\pi, \pi]$ を持つ定常過程から得られた標本とし、パラメータ $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ (真値を θ_0 とする) は以下のスペクトルモーメント条件

$$\int_0^\pi G_{\theta_0}(\omega) f(\omega) d\omega = \mathbf{0} \quad (1)$$

によって特徴付けられるものとする。ここに推定関数 $G_\theta(\omega)$ は

$$G_\theta(\omega) = (g_{1,\theta}(\omega), \dots, g_{p,\theta}(\omega))' : \Pi \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad (2)$$

と記述される任意の偶関数である。例えば、 $G_\theta(\omega) = (\cos(m_1\omega), \dots, \cos(m_p\omega))' - \theta$ ととれば、 θ_0 はラグ m_1, m_2, \dots, m_p の自己相関係数を表すことができる。

3 変化点問題の設定

スペクトル密度関数の変化における以下の仮説検定問題を考える。

帰無仮説 H_0

X_1, \dots, X_n はスペクトル密度関数 $f(\omega)$ を持つ定常過程から得られた標本である。

対立仮説 H_1

$X_1^{(1)}, \dots, X_{[n\tau]}^{(1)}$ はスペクトル密度関数 $f(\omega)$ を持つ定常過程から得られた標本であり,
 $X_{[n\tau]+1}^{(2)}, \dots, X_n^{(2)}$ はスペクトル密度関数 $h(\omega)$ を持つ定常過程から得られた標本である.

帰無仮説は変化なしのモデルを表している. 対立仮説は変化ありのモデルを表しており,
 $\tau \in (0, 1)$ は未知の変化点である.

さて, $f(\omega) \neq h(\omega)$ であれば $\theta_f \neq \theta_h$ とし, 以下の経験尤度比

$$R(\tau) = \frac{\sup_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}} \left\{ \prod_{i=1}^{N_1} p_i \prod_{j=1}^{N_2} q_j \left| \sum_{i=1}^{N_1} p_i \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}}(\omega_{1,i}) I_1(\omega_{1,i}) = \sum_{j=1}^{N_2} q_j \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}}(\omega_{2,j}) I_2(\omega_{2,j}) = \mathbf{0} \right. \right\}}{\sup_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}_f, \boldsymbol{\theta}_h} \left\{ \prod_{i=1}^{N_1} p_i \prod_{j=1}^{N_2} q_j \left| \sum_{i=1}^{N_1} p_i \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_f}(\omega_{1,i}) I_1(\omega_{1,i}) = \mathbf{0}, \sum_{j=1}^{N_2} q_j \mathbf{G}_{\boldsymbol{\theta}_h}(\omega_{2,j}) I_2(\omega_{2,j}) = \mathbf{0} \right. \right\}} \quad (3)$$

を考える. ここに $I_1(\omega)$ と $I_2(\omega)$ はそれぞれ変化点前と後の標本から得られたピリオドグラムである. $\eta \in (0, 1)$ をあらかじめ与えられた定数とし, 検定統計量として

$$Z_n = \max_{\tau \in (\eta, 1-\eta)} -2 \log R(\tau)$$

を考え, これが大きな値をとるときに帰無仮説 H_0 を棄却する. 検定統計量の漸近的性質として以下の結果を得る.

Theorem 1 適当な正則条件を課せば, H_0 のもとで

$$-2 \log R(\tau) \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^p B_k^2(\tau)$$

が成り立つ. ここに $\{B_k(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$ は独立なブラウン橋の列である.

Theorem 2 適当な正則条件を課せば, H_0 のもとで

$$Z_n \xrightarrow{d} \sup_{\eta < s < 1-\eta} \sum_{k=1}^p \frac{B_k^2(s)}{s(1-s)}.$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] GIRAITIS, L. & LEIPUS, R. (1992). Testing and estimating in the change-point problem of the spectral function. *Lith. Math. J.* **32**, 15-29.
- [2] PICARD, D. (1985). Testing and estimating change-points in time series. *Adv. Appl. Probab* **17**, 841-867.
- [3] ZOU, C., LIU, Y., QIN, P. & WANG, Z. (2007). Empirical likelihood ratio test for a change-point problem. *Stat. Probab. Lett.* **77**, 374-382.

On parameter estimation based on the contact distance for certain superposed Neyman-Scott spatial cluster fields

The Institute of Statistical Mathematics

By Ushio TANAKA

Background

A Neyman-Scott spatial cluster field results from a collection of homogeneous, isotropic and independent clusters, whose centres form a homogeneous Poisson point field.

Neyman and Scott originally posed a model to describe astronomical galaxies. This has subsequently been generalized to describe locations of disease, for instance. These models can be applied to many fields, and are therefore very important. Thus, it is very important to analyze and apply its model.

Due to its rather complicated structure, it is known that to describe its direct maximum likelihood estimation is not possible. In order to apply a sensitive measure for model selection, like the *AIC*, maximum likelihood analyses for cluster fields have been recommended.

Accordingly, Tanaka et al. [3] have proposed the approximated isotropic and non-homogeneous Poisson maximum likelihood analysis, whose non-homogeneous intensity function is rotation invariant, is given by the *Palm intensity function* whose estimation procedure is referred to as the *MPLE procedure*, for short.

As advocated in Tanaka et al. [3], for two superposed Neyman-Scott spatial cluster fields, the MPLE procedure yields inability to identify them due to some sophisticated condition of indispensability for the MPLE procedure.

Tanaka and Ogata [2] identify them by combining estimated parameters via the MPLE procedure with the NND intensity analysis, which is roughly speaking, a non-homogeneous intensity function with rotation invariant is a derivative of a nearest neighbor distance function, they have overcome the inability problem.

Results

In the present study (cf. Tanaka [1]), we consider here the superposed Neyman-Scott spatial cluster fields, whose *J*-functions are not coincident at some contact distance. We show that parameters of this model can be determined completely via an isotropic and non-homogeneous Poisson maximum likelihood analysis based on contact distances. A sufficient condition for our method to hold is that the maximum log-likelihood function, based on the contact distances, is unimodal. For such a superposed Neyman-Scott spatial cluster field, the proposed estimation procedure also enables us to generalize the number of the superposition.

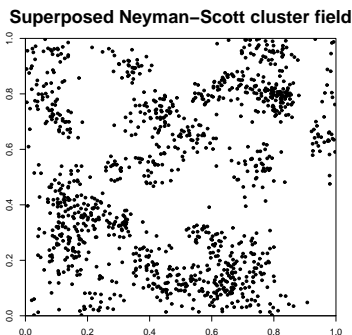


Figure 1: Simulation of the superposed Neyman-Scott cluster field.

References

- [1] Tanaka, U. On parameter estimation based on the contact distance for certain superposed Neyman-Scott spatial cluster fields, preprint.
- [2] Tanaka, U. and Ogata, Y. Identification and estimation of the superposed Neyman-Scott spatial cluster processes, preprint.
- [3] Tanaka, U., Ogata, Y. and Stoyan, D. (2008). Parameter estimation and model selection for Neyman-Scott point processes, *Biom. J.* **50**, 43–57.

Resampling Procedure in estimation of Optimal Portfolios for Time-Varying ARCH Processes

白石 博 (東京慈恵会医科大学)

ポートフォリオ理論において、古典的な手法では、資産の収益率過程の平均 (μ) と分散共分散行列 (Σ) の最適化関数で最適ポートフォリオを定義 (平均 - 分散最適ポートフォリオ) し、その推定量として標本平均 ($\hat{\mu}$) および標本分散共分散行列 ($\hat{\Sigma}$) を最適化関数に代入して最適ポートフォリオ推定量を定義する。資産の収益率過程が時間に従属性が無い正規過程に従う場合、上記推定量の漸近的一致性は成り立つが、経験データを見ると収益率過程はしばしば時間に従属性があり、かつ非正規であることが知られている。特に収益率過程が heavy tail を持つ分布に従うとき、上記最適ポートフォリオ推定量は、はずれ値の影響を大きく受けることが知られている。この問題に対し、Lauprete, Samarov and Welsch (2002) は、裾の重い分布に対しても適用可能なポートフォリオ最適化手法として、shortfall 確率をリスク尺度とした最適化手法を提案した。本報告でも、リスク尺度を γ -shortfall と定義し、最適ポートフォリオ推定量を考える。

収益率過程に関しては、本報告では Dahlhaus and Rao(2006) によって提案された時変 ARCH(p) 過程であると仮定した。時変 ARCH(p) 過程とは、Engle(1982) によって提案された ARCH モデルのパラメータが時間によって滑らかに変化する確率過程であり、非定常過程のクラスの一つである。本報告では、Dahlhaus and Rao(2006) の結果を拡張して、時変パラメータ $\theta(t/N)$ の擬似最尤推定量 $\hat{\theta}(t/N)$ の漸近正規性を示し、これを使ってブートストラップ標本 $\{X_{t,N}^*\}$ を生成する。さらに、ブートストラップ標本を使って γ -shortfall の推定量を構成し、 γ -shortfall 最適化ポートフォリオ推定量を提案した。

$\{X_{t,N} = (X_{1,t,N}, \dots, X_{m,t,N})'; t = 1, \dots, N, N \in \mathbb{Z}\}$ が、次で表現される時変パラメータを持つ m 次元 ARCH(p) 過程に従うとする。

$$\begin{aligned} X_{t,N} &= \mu(t/N) + D_{t,N}\epsilon_t, \quad Y_{t,N} = X_{t,N} - \mu(t/N), \\ D_{t,N}^2 &= U(t/N) + \sum_{j=1}^p (I_m \otimes Y_{t-j,N}') A_j(t/N) (I_m \otimes Y_{t-j,N}), \end{aligned}$$

ここに $\epsilon_t = (\epsilon_{1,t}, \dots, \epsilon_{m,t})' \sim i.i.d.(\mathbf{0}, I_m)$ とする。また、 $\mu(u) = (\mu_1(u), \dots, \mu_m(u))$, $U = \text{diag}(U_1(u), \dots, U_m(u))$ および $A_j(u) = \text{diag}(A_{1,j}(u), \dots, A_{m^2,j}(u))$ は、時点 $u \in [0, 1]$ に依存する時変パラメータとする。また、時変パラメータを

$$\theta(u) = (\mu(u)', \vec{U}(u)', \vec{A}_1(u)', \dots, \vec{A}_p(u)')'$$

と定義し、 $\theta(t_0/N)$ の推定量 $\hat{\theta}(t_0/N)$ を次で定義する。

$$\hat{\theta}(t_0/N) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_{t_0,N}(\theta), \quad \mathcal{L}_{t_0,N}(\theta) = \sum_{k=p+1}^N \frac{1}{bN} W\left(\frac{t_0 - k}{bN}\right) l(X_{k,N}, \mathbf{X}_{k-1,N}, \theta)$$

ここに、 $l(X_{k,N}, \mathbf{X}_{k-1,N}, \theta)$ は Gaussian 疑似対数尤度とする。
このとき、適当な正則条件の下、次の結果が得られる。

定理 1 $|u_0 - t_0/N| < 1/N$ かつ $b = O(N^{-1/5})$ ならば、

$$\sqrt{bN} \left\{ \hat{\theta}(t_0/N) - \theta(u_0) \right\} \xrightarrow{d} N(B_K(u_0), \Omega(u_0))$$

次に、 $\{\hat{\theta}(t/N)\}$ を使ってブートストラップ標本を生成する。誤差項 ϵ_t の推定量として次の $\hat{\epsilon}_t$ を定義する。

$$\hat{\epsilon}_t = \omega(\mathbf{X}_{t-1,N}, \hat{\theta}(t/N))^{-1/2} \{X_{t,N} - \hat{\mu}(t/N)\}, \quad t = p+1, \dots, N$$

$\hat{F}_N(\cdot)$ を各 $\hat{\epsilon}_t$ で大きさ $1/(N-p)$ をとる経験分布関数とし、 \hat{F}_N から、リサンプリング誤差 $\{\epsilon_t^*\}$ を無作為抽出する。これを使って、ブートストラップ標本 $\{X_{t,N}^*\}$ が生成される。

$$X_{t,N}^* = \hat{\mu}(t/N) + \omega(\mathbf{X}_{t-1,N}, \hat{\theta}(t/N))^{1/2} \epsilon_t^*$$

上記ブートストラップ標本を使って、 γ -shortfall 最適化ポートフォリオ推定量を

$$\begin{aligned} \alpha_{t_0,N}^{*opt} &= \arg \min_{\alpha} s_{\gamma,t_0,N}^*(\alpha), \\ s_{\gamma,t_0,N}^*(\alpha) &= \alpha' \hat{\mu} \left(\frac{t_0}{N} \right) - E^* [\alpha' X_{t_0,N}^* | \alpha' X_{t_0,N}^* \leq q_{\gamma,t_0,N}^*(\alpha)], \\ q_{\gamma,t_0,N}^*(\alpha) &= \inf \{z | P^*(\alpha' X_{t_0,N}^* \leq z) \geq \gamma\}. \end{aligned}$$

とする。

References

- [1] Dahlhaus, R. and Rao, S. S. (2006) Statistical Inference for Time-varying ARCH processes. *The Annals of Statistics*. **34** 1075-1114.
- [2] Efron, B. (1979) Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*. **7**, 1-26.
- [3] Engle, R. F. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. **50**, 987-1007.
- [4] Lauprete, G. J., Samarov, A. M. and Welsch, R. E. (2002) Robust portfolio optimization. *Metrika*. **55**, 139-149.

四分相関係数の分布に関する漸近展開

小樽商科大学 小笠原 春彦

Asymptotic expansions for the tetrachoric correlation coefficient

1. Abstract: Accurate distributions of the estimator of the tetrachoric correlation coefficient and, more generally, functions of sample proportions for the 2 by 2 contingency table are derived. The results are obtained given the definitions of the estimators even when some marginal cell(s) are empty. Then, asymptotic expansions of the distributions of the parameter estimators standardized by the population asymptotic standard errors up to order $O(1/n)$ and those of the studentized ones up to the order next beyond the conventional normal approximation are derived. The asymptotic results can be obtained in a much shorter computation time than the accurate ones. Numerical examples were used to illustrate advantages of the studentized estimator of Fisher's z transformation of the tetrachoric correlation coefficient.

Keywords: tetrachoric correlation coefficient, Edgeworth expansion, Cornish-Fisher expansion, asymptotic cumulants, studentized estimators, Fisher's z transformation.

2. Numerical illustration

Table 1. Population cell probabilities and parameter values

Case	π_a	π_b	π_c	π_d	τ_x	τ_y	ρ	z
1	.1	.1	.1	.7	-.842	-.842	.606	.703
2	.1	.1	.3	.5	-.253	-.842	.181	.183
3	.1	.2	.3	.4	-.253	-.524	-.150	-.151
4	.2	.1	.3	.4	0	-.524	.355	.371
5	.3	.1	.2	.4	0	-.253	.607	.704
6	.3	.2	.2	.3	0	0	.309	.319
7	.4	.1	.1	.4	0	0	.809	1.124

Table 2. Accurate and asymptotic cumulants of the parameter estimators

α_1 (bias)				$\alpha_3 / \alpha_2^{3/2}$ (skewness)			α_4 / α_2^2 (kurtosis)			
Acc. (n)				Acc. (n)			Acc. (n)			
Case	(200)	(1000)	Asy.	(200)	(1000)	Asy.	(200)	(1000)	Asy.	
ρ	1	-.91	-.89	-.88	-6.16	-6.04	-6.02	59	54	53
	2	-.35	-.34	-.34	-1.61	-1.58	-1.58	-2	-3	-3
	3	-.15	-.13	-.13	.51	.55	.56	-9	-9	-10
	4	-.13	-.14	-.14	-2.12	-2.16	-2.17	-2	-3	-2
	5	-.28	-.28	-.28	-4.09	-4.14	-4.16	16	17	17
	6	-.19	-.19	-.19	-1.88	-1.90	-1.91	-6	-6	-6
	7	-.31	-.31	-.31	-6.60	-6.67	-6.69	59	61	61
z	1	1.61	1.55	1.54	2.14	2.00	1.97	36	28	27
	2	.25	.25	.25	.41	.40	.40	25	19	19
	3	-.60	-.57	-.56	-1.11	-.98	-.96	18	15	14
	4	.94	.90	.89	1.67	1.53	1.50	20	17	17
	5	1.63	1.58	1.57	2.70	2.53	2.49	26	22	22
	6	.61	.60	.59	1.15	1.10	1.09	11	10	10
	7	2.93	2.82	2.80	4.03	3.75	3.69	43	37	35

Note. Acc.: Accurate values; Asy.: Asymptotic values.

Table 3. Ratios of the accurate and asymptotic standard error for the parameter estimators

Case	$\alpha_2^{1/2}$	(n)	(200)	(1000)		
		SE/ASE	HASE/ASE	SE/ASE	HASE/ASE	
ρ	1	1.39	1.0195	1.0181	1.0036	1.0037
	2	1.76	1.0077	1.0073	1.0014	1.0015
	3	1.65	1.0030	1.0025	1.0005	1.0005
	4	1.51	1.0032	1.0035	1.0006	1.0007
	5	1.15	1.0042	1.0044	1.0008	1.0009
	6	1.46	1.0002	1.0001	1.0000	1.0000
	7	.74	1.0092	1.0091	1.0018	1.0008
z	1	2.20	1.0317	1.0290	1.0059	1.0059
	2	1.82	1.0242	1.0225	1.0045	1.0045
	3	1.69	1.0189	1.0174	1.0036	1.0035
	4	1.72	1.0193	1.0185	1.0037	1.0037
	5	1.82	1.0208	1.0197	1.0039	1.0040
	6	1.62	1.0132	1.0126	1.0026	1.0025
	7	2.14	1.0290	1.0263	1.0054	1.0053

Note. SE: Accurate standard errors; ASE= $(\alpha_2 / n)^{1/2}$; HASE= $\{(\alpha_2 / n) + (\Delta\alpha_2 / n^2)\}^{1/2}$.

Spectral Magic

David Stoffer (Univ. Pittsburgh)

Abstract:

The problem of estimating the spectral matrix of a multivariate time series that has slowly changing dynamics has become a recent interest of mine. The problem is difficult and had to be broken into smaller pieces. I will discuss the first two pieces; there are at least two more pieces to the puzzle. In the first place, estimating the spectral density matrix of vector-valued stationary time series is not easy because different degrees of smoothness are typically needed for different components; this problem must be balanced with the fact that the matrix must be positive semi-definite. I will discuss our approach and then move on to the harder task of estimating the slowly changing spectral density of a univariate locally stationary time series.

ON APPROXIMATIONS FOR POWER-DIVERGENCE FAMILY OF STATISTICS

Vladimir Ulyanov (Moscow State Univ.)

We study approximations for power-divergence family of statistics which includes in particular traditional goodness-of-fit tests: Pearson's chi-square test, log likelihood ratio statistic and Freeman-Tukey statistic. We get rate of convergence to chi-square distribution reducing the original problem to problem of approximation of number of lattice points in large convex bodies. The talk consists of two parts: at first we consider approximation for Pearson's chi-square test. It leads to classical problem in number theory about number of integer points in ellipsoids. The second part is devoted to other statistics whose distribution functions could be represented as probabilities that normed sums of independent integer valued random vectors hit convex sets which are "similar" to ellipsoids. In this case it is necessary to apply number theoretic results obtained just recently.

On the asymptotic property of unit root process generated by locally stationary processes

新潟大学 理学部 蛭川 潤一

新潟大学 理学部 定方 真子

ランダムウォークは 1 次の自己回帰 (AR(1)) モデルの係数が 1 の場合に相当し、非定常過程のクラスである単位根過程に含まれる。ランダムウォークの部分和過程は標準ブラウン運動に分布収束することがよく知られている。この事実は汎関数中心極限定理 (FCLT) と呼ばれる。Beveridge-Nelson (B-N) 分解と呼ばれる手法を使うと、ランダムウォークのイノベーション過程を i.i.d. 過程から、線形過程に一般化することが出来る。本講演では、局所定常過程 (LSP) をイノベーション過程に持つ、単位根過程や単位根近接モデルについて FCLT を導いた。局所定常過程も非定常過程であるので、これらのモデルは、二つの異なるタイプの非定常性を表現することができる。更に、LSP イノベーションを持つ単位根過程は limiting Gaussian functional (LGF) 性を持つことを導き、LAMN のクラスに入らないことを示した。

LSP イノベーションを持つ単位根過程：

$$\begin{aligned} x_{j,T} &= x_{j-1,T} + u_{j,T} \\ &= x_{0,T} + \sum_{i=1}^j u_{i,T} \end{aligned}$$

ここに

$$u_{j,T} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left(\frac{j}{T} \right) \varepsilon_{j-l} = \int_{-\pi}^{\pi} A \left(\frac{j}{T}, \lambda \right) e^{ij\lambda} d\xi(\lambda)$$

$$x_{0,T} = \sigma \sqrt{T} X(0), X(0) \sim N(\gamma_X, \delta_X^2), X(0) \perp \{\varepsilon_j\}$$

部分和過程：

$$X_T(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} x_{j,T} + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} u_{j,T} \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right)$$

定理 1 (LSP イノベーションを持つ単位根過程についての FCLT).

$$X_T \Rightarrow h^{(1)}(X(0), W) \equiv X$$

ここに

$$h_t^{(1)}(x, y) = x + \alpha(t, 1) y(t) - \int_0^t \alpha'(\nu, 1) y(\nu) d\nu$$

$$\implies dX(t) = A(t, 0) dW(t)$$

疑似正規対数尤度：

$$\begin{aligned}
& T \{L_T(\mathbf{x}_T; \theta, \rho_T) - L_T(\mathbf{x}_T; \theta_0, 1)\} \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{|\Sigma_{\theta_0}|}{|\Sigma_\theta|} + \frac{1}{2} \mathbf{u}'_T \{\Sigma_{\theta_0}^{-1} - \Sigma_\theta^{-1}\} \mathbf{u}_T - \beta \frac{1}{T} \mathbf{u}'_T \Sigma_\theta^{-1} \hat{\mathbf{x}}_T - \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{T^2} \hat{\mathbf{x}}'_T \Sigma_\theta^{-1} \hat{\mathbf{x}}_T \\
&\equiv T \{L_T(\mathbf{u}_T; \theta) - L_T(\mathbf{u}_T; \theta_0)\} \quad (\text{LAN}) \\
&\quad - \beta G_T^{(1)} - \frac{\beta^2}{2} G_T^{(2)}
\end{aligned}$$

LGF 性：

$$\begin{aligned}
& -\beta G_T^{(1)} \Rightarrow g^{(1)}(W, X) \\
&= -\frac{\beta \sigma_{\theta_0}^2}{\sigma_\theta^2} \int_0^1 B(\nu, 0) X(\nu) dW(\nu) \\
&= -\frac{\beta \sigma_{\theta_0}^2}{\sigma_\theta^2} \int_0^1 A_{\theta_0}(u, \lambda) |A_\theta(u, \lambda)|^{-2} X(\nu) dW(\nu) \\
&= -\frac{\beta \sigma_{\theta_0}^2}{\sigma_\theta^2} \int_0^1 \frac{X(\nu)}{|A_\theta(\nu, 0)|^2} dX(\nu) \\
&\quad - \frac{\beta^2}{2} G_T^{(2)} \Rightarrow g^{(2)}(X) \\
&= -\frac{\beta^2 \sigma_{\theta_0}^2}{2 \sigma_\theta^2} \int_0^1 \frac{X(\nu)^2}{|A_\theta(\nu, 0)|} d\nu
\end{aligned}$$

$\theta = \theta_0 \implies$ 測度変換 (ギルサノフの定理)：

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_Y}{d\mu_X}(X) &:= \exp \left\{ g^{(1)}(W, X) + g^{(2)}(X) \right\} \\
&= \exp \left\{ -\beta \int_0^1 \frac{X(\nu)}{|A_{\theta_0}(\nu, 0)|^2} dX(\nu) - \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 \frac{X(\nu)^2}{|A_{\theta_0}(\nu, 0)|} d\nu \right\}
\end{aligned}$$

LAMN 条件： $P_{\eta^0, T}$ の下で

(C1)

$$\Lambda_T(\eta^0 + \delta_T \mathbf{r}, \eta^0) - \left[\mathbf{r}' \Delta_T(\eta^0) - \frac{1}{2} \mathbf{r}' S_T(\eta^0) \mathbf{r} \right] \xrightarrow{P} 0$$

(C2)

$$(\Delta_T(\eta^0), S_T(\eta^0)) \Rightarrow (S(\eta^0)^{1/2} Z, S(\eta^0)), \quad Z \sim N(0, \mathbf{I}), Z \perp S$$

LAMN の必要十分条件:

(C3) $\{P_{\eta^0, T}\}$ と $\{P_{\eta^0 + \delta_T \mathbf{r}, T}\}$ が contiguous

(C4) $P_{\eta^0 + \delta_T \mathbf{r}, T}$ の下で $S_T(\eta^0) \Rightarrow S(\eta^0)$

$\theta = \theta_0 + \frac{h}{\sqrt{T}} \rightarrow \theta_0 \implies$ (C3) が成り立つ

$P_{\eta^0 + \delta_T \mathbf{r}, T}$ ($\beta \neq 0$) の下で

$$G_T^{(2)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{Y(\nu)^2}{|A_{\theta_0}(\nu, 0)|} d\nu \neq \int_0^1 \frac{X(\nu)^2}{|A_{\theta_0}(\nu, 0)|} d\nu$$

\implies (C4) は成り立たない

提案モデルは LAMN のクラスに入らない

The Method of Simulated Quantiles

David Veredas (Univ. Libre Bruxells)

We present an inference method based on quantiles, in the sense that functions of theoretical quantiles, which depend on the parameters of the assumed probability law, are matched with empirical quantiles, which depend on data. The optimization is based on simulations and the method provides consistent and asymptotically normal estimators of the parameters of interest. This method is useful for situations where the density function does not have a closed form, but it is simple to simulate, and/or moments do not exist. In fact, all along the article, the method is illustrated with the estimation of alpha-stable distributions. A thorough Monte Carlo study and an empirical application to financial indexes show the usefulness of the approach.

A uniform Berry-Esseen bound for M-estimators for geometrically ergodic Markov chain

Valentin Patilea (INSA-IRMAR & CREST-Ensai, France)

Abstract:

Let $\{X_n\}_{n \geq 0}$ be a V -geometrically ergodic Markov chain with $V \geq 1$ some fixed unbounded real-valued function and consider $M_n(\cdot) = n^{-1} \sum_{k=1}^n F(\cdot, X_{k-1}, X_k)$, $\cdot \in \mathcal{A} \subset R$ for some real-valued functional $F(\cdot, \cdot, \cdot)$. Define the M -estimator $\hat{\alpha}_n$ such that $M_n(\hat{\alpha}_n) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}} M_n(\alpha) + c_n$ with $c_n, n \geq 1$ some sequence of real numbers decreasing to zero. Under some standard regularity assumptions, close to that of the i.i.d case, and under the moment assumption

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \cdot}(\cdot, x, y) \right| + \left| \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \cdot}(\cdot, x, y) \right|^{3+\varepsilon} \leq C (V(x) + V(y))$$

for some constants $\varepsilon > 0$ and $C > 0$, the estimator $\hat{\alpha}_n$ satisfies a Berry-Esseen theorem uniformly with respect to the underlying probability distribution of the Markov chain. (joint work with Loic Herve and James Ledoux)

On testing for Symmetry in Skew-normal Families

Marc Hallin (Univ.Libre Bruxells)

Skewed normal families of distributions recently have met an increasing interest in theoretical as well as applied research. An embarrassing feature of those families is that their information matrix, in the vicinity of symmetry, degenerates, which apparently compromises the classical construction of tests for symmetry. A common opinion is that the optimal tests is the trivial one $\phi = 0$. We show that this conclusion is unnecessarily pessimistic, and is due to a wrong perception of local experiments. After establishing local asymptotic normality in the vicinity of symmetry, we easily derive the locally asymptotically optimal tests.

(joint with Christophe Ley and Anna-Clara Monti)

パーセンタイル値の推定を目的とした折れ線回帰分析のアルゴリズム (不等式制約の下での、単調性を保証する推定方法)

神戸大学大学院 人間発達環境学研究科 稲葉太一

1. はじめに

この報告では、折れ線回帰分析を用いたパーセンタイル値の推定方法として、単調性が保証される分析方法を紹介する。このとき、平均値における単調性のみならず、パーセンタイル値の推定値にも単調性が要求されている状況を想定している。

例えば、乳幼児の言語獲得のモデル化という要請があり、ある質問紙における1群の項目への反応数（比率データ）の、月齢ごとの測定値がある。これを参照標本として、新しく得られたデータを判定するためのパーセンタイル値を算出するという問題がある。

通常、このような比率データはロジット回帰分析が適用されることが考えられる。しかし、ロジット変換は、二項分布にとっては最適性がある変換であるが、項目間の独立性や個人差がない、という仮定は現実的ではなく、実際、上記のデータセットでは、これらは成り立っていない。これが原因で、ロジット変換値の分散は、項目数 n や比率 P によって $\frac{1}{nP(1-P)}$ に比例するというよりも、むしろ各月齢で等分散の様相を呈していた。

このような問題に対する、最も単純な回答は、「目的変数の単調な変数変換を施した後、傾きが非負の直線モデルを想定し、これに月齢ごとに同じ幅の平行線でパーセンタイル値を推定する」という考え方であろう。

ここで問題となるのは、言語獲得の開始時点や終了時点の捕捉のため、調査月齢が十分広いことが挙げられる。そこで、低い月齢では「無反応」であることへの対応や、すべての設問項目に対して、ほぼ全員が回答したことによる「頭打ち現象」への対応のため、1つないしは2つの折れ点を想定した。

ここで、一部のデータセットでは、折れ点にパーセンタイル値ごとの違いが示唆されていた。この折れ点に幅がある計算方法（今後、“範囲版”と呼ぶ）を紹介する。

2. 扱うモデル

ここで扱うデータは、各月齢 i における3個のデータ（20%値、50%値、80%値などの推定値） $(y_{ij}, i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, 3)$ とする。

（ここで、折れ点を表わす i_1, i_2 は、 $1 \leq i_1 < i_2 \leq k$ とする。）

2.1. パーセンタイル値を考慮に入れたモデル

以下に、折れ線回帰モデル（1点折れ）、折れ線回帰モデル（2点折れ）のパーセンタイル値を考慮したモデルを示す。

$$(2.1.1) \quad y_{ij} = \beta_0 + \beta_1(i - i_1)(1 - Z_i^{(1)}) + \beta_2(i - i_1)Z_i^{(1)} + \beta_3W_j + \varepsilon_{ij}$$

$$(2.1.2) \quad y_{ij} = \beta_0 + \beta_1(i - i_1)(1 - Z_i^{(1)}) + \beta_2(i - i_1)Z_i^{(1)}(1 - Z_i^{(2)}) \\ + \beta_3(i - i_2)Z_i^{(2)} + \beta_4(i_2 - i_1)Z_i^{(2)} + \beta_4W_j + \varepsilon_{ij}$$

ただし、 $Z_i^{(1)} = I(i \geq i_1)$, $Z_i^{(2)} = I(i \geq i_2)$, $W_j = j - 2$ とする。

2.2. 範囲版モデル

以下に、折れ線回帰モデル（1点折れ）、折れ線回帰モデル（2点折れ）のパーセントイル値を考慮し、更に折れ点が生月齢で変化するモデル（範囲版）と、考えられる制約条件を示す。

$$(2.2.1) \quad y_{ij} = \beta_0 + \beta_1(i - i_1 + \beta_4 W_j)(1 - Z_{ij}^{(1)}) + \beta_2(i - i_1 + \beta_4 W_j)Z_{ij}^{(1)} + \beta_3 W_j + \varepsilon_{ij}$$

$$(2.2.2) \quad y_{ij} = \beta_0 + \beta_1(i - i_1 + \beta_4 W_j)(1 - Z_{ij}^{(1)}) + \beta_2(i - i_1 + \beta_4 W_j)Z_{ij}^{(1)}(1 - Z_{ij}^{(2)}) \\ + \beta_3(i - i_2 + \beta_5 W_j)Z_{ij}^{(2)} + \beta_2(i_2 - i_1 + (\beta_4 - \beta_5)W_j)Z_{ij}^{(2)} + \beta_6 W_j + \varepsilon_{ij}$$

ただし、 $Z_{ij}^{(1)} = I(i \geq i_1 - \beta_4 W_j)$, $Z_{ij}^{(2)} = I(i \geq i_2 - \beta_5 W_j)$, $W_j = j - 2$ とする。

制約条件 2.2 :

モデル (2.2.1) では、傾き $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ は 0 以上であることが期待される。また、 i_1 が発芽時期であるとする、 $\beta_1 \leq \beta_2$ と考えられる。（飽和時期なら、 $\beta_1 \geq \beta_2$ 。）

モデル (2.2.2) では、傾き $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ は 0 以上で、 $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$ と考えるのが自然であると思われる。

3. 制約付き最小化問題における補題と定理

定数項のない回帰モデルを考える。

$$(3.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{ただし、} \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)', \mathbf{X} = (x_{ij}), \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)'.$$

ここで、最小二乗解とは、次の Q を最小にする $\boldsymbol{\beta}$ のことである。

$$(3.2) \quad Q := (1/n) \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\|^2$$

補題 1 : 定数項のないモデルにおいて、 $S := (1/n)\mathbf{X}'\mathbf{X}$ が正値であれば、最小二乗解が唯一求められる。

補題 2 : p 次元の母数ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の最初の q 次元ベクトル $\boldsymbol{\beta}_1$ は制約条件がないが、残りの $p - q$ 次元 $\boldsymbol{\beta}_2$ は $\boldsymbol{\beta}_1$ の一次結合で表せるとする。（即ち、 $\mathbf{x}_2 = \mathbf{L}'\mathbf{x}_1$ 。）このとき、この線形制約式の下での最小二乗解も、唯一求められる。

補題 3 : p 個の変数のうち、 q 個の変数に関して 0 以上という不等式制約がある場合には、制約の無い条件の下での解（無条件解）と、 s 個の不等式制約のうちのいくつかの等号が成立する解（境界上の解）の中に、最小二乗解がある。

定理 : 今回の扱っているモデルにおける最小二乗解は、求められる。

参考文献

- [1] 小椋たみ子・綿巻徹 (2004) 日本語マッカーサー乳幼児言語発達質問紙、「語と身振り」手引き、京都国際社会福祉センター
- [2] 綿巻徹・小椋たみ子 (2004) 日本語マッカーサー乳幼児言語発達質問紙、「語と文法」手引き、京都国際社会福祉センター
- [3] 前田美穂・稲葉太一・小椋たみ子・綿巻徹 (2003) パーセントイル値の推定を目的とした折れ線回帰分析のアルゴリズム、——言語獲得の発達過程の研究——、神戸大学発達科学部研究紀要、第 11 号、第 1 号、103-108.
- [4] 稲葉太一・小椋たみ子・綿巻徹・前田美穂 (2006) 乳幼児の言語獲得のモデル化：SPSS とエクセルを用いた計算法、京都国際福祉センター「発達・療育研究」Vol.22, 27-39.

カーネル法を用いた判別分析の誤判別率について

今井英幸 *

田中 章 *

池田盛一 †

1 はじめに

本報告では、加法的雑音があるモデル $y = f(x) + \varepsilon$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0, \mathbb{V}(\varepsilon) = \sigma^2$ からの標本 $\{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ に基づいて関数 $f(x)$ を推定する問題を考える。ここで $x \in \mathbb{R}^p$ は説明変数、 f は $D \subset \mathbb{R}^p$ 上で定義された実数値関数からなるヒルベルト空間 \mathcal{H} に属する関数であるとする。直積 $D \times D$ 上で定義された実数値関数 $k(x, \tilde{x}), x, \tilde{x} \in D$ が条件 (1) 任意の $\tilde{x} \in D$ を固定すると、 $K_{\tilde{x}} = k(\cdot, \tilde{x}) \in \mathcal{H}$, (2) 任意の $\tilde{x} \in D$ を固定すると、 $f \in \mathcal{H}$ に対して $f(\tilde{x}) = \langle f, K_{\tilde{x}} \rangle_{\mathcal{H}}$, をみたすとき、 $K(x, \tilde{x})$ をヒルベルト空間 \mathcal{H} の再生核という。再生核をもちいると、標本 y_i は $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i = \langle f, K_{x_i} \rangle_{\mathcal{H}} + \varepsilon_i$ となるので、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)'$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)'$, とすると、 $\mathbf{y} = (\langle f, K_{x_1} \rangle_{\mathcal{H}} + \varepsilon_1, \langle f, K_{x_2} \rangle_{\mathcal{H}} + \varepsilon_2, \dots)' = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, K_{x_i} \rangle_{\mathcal{H}} \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\varepsilon} = A\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $A = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{e}_i \otimes K_{x_i})$ である。ここで、 $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots)$ であり、 $f \otimes g$ は $f \in \mathcal{H}$ と $g \in \mathcal{H}$ のシャッテン形式で、 $(f \otimes g)h = \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}} f$, $h \in \mathcal{H}$ となる有界作用素である。この作用素 A がサンプリングを表す。

2 カーネル法による関数の推定

説明変数 $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ に対応する再生核からなる基底 $\{K_{x_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ で張られる部分空間の閉包を S とすると、推定すべき (未知) 関数 f が部分空間 S に属している場合には適当な係数 $\alpha_i, i \in \mathbb{N}$ をもちいて

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i K_{x_i}$$

とできる。したがって、 $S = \mathcal{H}$ であれば、加法的雑音がない場合には $f \in \mathcal{H}$ を K_{x_i} の一次結合で表されるため、適切なサンプルと再生核を用いることで f を $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ から再構成することが可能である。 $S = \mathcal{H}$ となるためには、

$$k(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k(\mathbf{y}, x_i) M_{ij} k(\mathbf{y}, x_j) \quad (1)$$

が任意の $\mathbf{y} \in D$ について成り立つことが必要十分である (Tanaka et al.)。

行列 $G = (k(x_i, x_j))$ を再生核にもつようなヒルベルト空間は一意に決まるのでこれを \mathcal{H}_G とする。さらに、 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{H}_G$ にたいして $\langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \rangle_{\mathcal{H}_G} = \mathbf{g}_1' M \mathbf{g}_2$ と表されるものとする、(未知) 関数 f の推定は

$$\hat{f} = A^* \mathbf{y} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_{x_i} \otimes \mathbf{e}_i \right) (A\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon})$$

となるため、真の関数との差は

$$f - \hat{f} = f - \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_{x_i} \otimes \mathbf{e}_i \right) (A\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}) = f - \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_{x_i} \otimes \mathbf{e}_i \right) A\mathbf{f} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} K_{x_i} \otimes \mathbf{e}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}$$

* 北海道大学大学院情報科学研究科

† 釧路工業高等専門学校

と評価される。条件 (1) が成り立つ場合、 $f - (\sum_{i=1}^{\infty} K_{\mathbf{x}_i} \otimes e_i)Af = 0$ となる。一方、

$$(\sum_{i=1}^{\infty} K_{\mathbf{x}_i} \otimes e_i)\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \varepsilon, e_i \rangle_{\mathcal{H}_G} K_{\mathbf{x}_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon' M e_i K_{\mathbf{x}_i}$$

から、

$$\langle (\sum_{i=1}^{\infty} K_{\mathbf{x}_i} \otimes e_i)\varepsilon, (\sum_{j=1}^{\infty} K_{\mathbf{x}_j} \otimes e_j)\varepsilon \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon' M e_i \varepsilon' M e_j k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \varepsilon' M \varepsilon$$

となる。期待値をとると

$$\mathbb{E}(\varepsilon' M \varepsilon) = \text{tr} M \sigma^2 \quad (2)$$

となり、作用素 M は非有界作用素となることから、推定された関数 \hat{f} と関数 f との差はサンプルサイズが大きくなっても小さくならない可能性がある。

3 カーネル回帰モデルにおける変数選択

サンプルサイズ N のサンプル $\{(\mathbf{x}_i, y_i) \mid i = 1, \dots, N\}$ と再生核 $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ から関数 f を推定することを考える。関数 f が再構成できるためには $f \in S \subset \mathcal{H}$ が必要であるが、 S が有限次元であるから、この条件は必ずしも成り立たないため、有限標本では f を部分空間 S 上に直交射影した $f_S = P_S f$ を推定することになる。ここで P_S は S への直交射影作用素である。サンプルは

$$y_i = f_S(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i = \langle f_S, K_{\mathbf{x}_i} \rangle_{\mathcal{H}} + \varepsilon_i = \sum_{j=1}^N k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \alpha_j + \varepsilon_i$$

から、 $\mathbf{y}_N = (y_1, \dots, y_N)'$, $K = (k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j))$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)'$ とすると、 $\mathbf{y}_N = K\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}$ となるので、 $f_S = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_{\mathbf{x}_i}$ の係数は $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_N = (K'K)^+ \mathbf{y}_N$ と推定される。式 (2) から、カーネル関数による回帰モデルでは、通常回帰モデルとは異なり、 $\hat{f}_S = K\hat{\boldsymbol{\alpha}}_N$ が $\hat{f}_S(x) \rightarrow f_S(x)$, $N \rightarrow \infty$ であることはかぎらないので、これを通常回帰モデルと同様の方法で変数選択を行う (Ikeda & Sato(2009))。一般化情報量規準を用いて変数の選択を行う方法が安道他 (2001) で、また、関数回帰モデルで同様の手法によるモデルの推定を行う手法が荒木、小西 (2004) で提案されている。

本報告では、数値例を用いて以下のことを示した。

- (1) 加法的雑音がない場合には、サンプルサイズを大きくすると、射影学習により推定された関数は真の関数に近づく。
- (2) 加法的雑音がある場合には、サンプルサイズを大きくしても、射影学習により推定された関数は真の関数に近づとはかぎらない。
- (3) 情報量規準によりサンプルを選択したモデルでは、サンプルサイズが大きくなっても推定誤差が増えない。これは、本報告の提案手法が過学習を回避するものであることを示唆している。

「ブラウン運動上の統計量とエキゾチックオプション」という題目で研究発表を行った。

タイトルが示すように、ブラウン運動上で統計量を考えると云うことは、通常ではない。通常の統計学では、観測が時系列的依存関係を持つ時系列モデルであっても、尤度を構成するためには偶然誤差項の密度関数を使う。つまり、統計量を構成する基礎を独立で同一分布に従う確率変数におく。ましてや、観測が独立で同一分布に従う一標本、二標本の場合はもっと直接的である。また線形回帰モデルでは、時系列モデルの場合と同様に、偶然誤差項の密度関数を尤度の基礎におく。

これに対して、ブラウン運動上で統計量を考えるということは、独立で同一分布に従う観測の部分和の上に統計量を考えることと同値である。ブラウン運動との違いは、観測時点が離散的であるところだけである。このような試みは 1960 年 *Annals of Mathematical Statistics* に掲載された Wendel 論文に見られるが、しかし、その後大きな発展を見たとは思えない。

発表者（三浦）が、ブラウン運動上の統計量を自覚したのは、1992 年に発表した「順序統計量に基づくルックバックオプション」という論文を発表したことが契機になる。これは対数正規過程の上で順序統計量を構成しているが、順序は対数変換のもとでは不変であるからブラウン運動上の統計量となる。筆者はこれをアルファ=クオンタイルと名づけた。その後、ブラウン運動上の順位統計量を定義し、確率分布を導出できた。これらは、確率過程の軌跡をデータとして構成する統計量であるが、上記二つの統計量とともに、軌跡の経験分布に対応するものの確率分布も導出した。これら三つは、データが、あるいは観測が独立同一分布に従う確率変数である通常の統計学においては、経験分布、順序等計量、順位統計量と呼ばれている基本的なノンパラメトリック統計量である。

このような通常ではないと思われる統計量を扱うことになったのは、金融工学あるいは数理ファイナンスと呼ばれる新しい数学、応用数学分野において、これらの統計量が、エキゾチックオプションとして分類され、数学的研究対象として主に確率過程論研究者から注目されたからである。筆者自身は、これを確率論にとどまらず、数理統計学として、さらに応用可能な統計量開発を目指した研究に育てたいと考え、時系列も出る研究者が集まるこの研究集会で発表した。

研究集会における発表では、まず上記の確率分布導出の数学的議論を紹介したうえで、つまりこういう通常でない統計量に関しても確率分布を求めることができることを紹介した上で、さらに、現在研究途上である二本の確率過程の相互依存関係を計測する統計量の基本的アイデアを紹介した。これは通常の統計学では、二つの確率変数の相関を計測することに相当するが、二本の確率過程を、対数差をとらずに、軌跡をそのまま使い、上記のアルファ=クオンタイルを使い、二本の軌跡の相互関係を表現した。この統計量の定義に関しては、多様な形の候補があるので、現在はその可能性の一つ一つを確認している段階で

ある。どの定義を採用するにしても確率分布論はかなり難しい数学的問題である。さらに、この枠組みの中で、推定論のモデルを構築するための基本的アイデアを提示した。これは筆者が 1985 年 4 月の日本数学会の特別講演において発表した“一般化されたレーマン対立仮説モデルにおけるノンパラメトリック推定論”で用いた推定の考え方を援用している。

研究集会に参加していたベルギーの Hallin 教授からは、ブラウン運動上のノンパラメトリック統計量を考えることの意味と意義について、一般的な見解を求められた。筆者の返答は、基本的な統計量が、出来上がったので、この上に有用な統計量が構成される可能性はあるが、それは今後の問題であること、そして現在分かっていることは、あるいは筆者が思うことは、確率過程を対数差に分けてしまうことにより、確率過程が持つ情報の一部が失われてるのではないかと、特に応用の世界である金融データを近似するモデルとして、軌跡の対数差を取ることで、軌跡それ自身をデータとして扱うことにより、その情報の漏れを回復できるのではないかと期待している、というものであった。

Hallin 教授がこの研究集会に参加するという知らせは研究集会の運営者から知らされた。さらに、研究集会の 3 週間前に筆者はチェコのプラハのカレル大学にて、同様の研究発表を行い、そこで、Hallin 教授とともに行った研究で、自己回帰モデルの順位統計量の研究に成功した Jureckova 教授と意見交換をし、筆者は Hallin 教授にも「ブラウン運動上のノンパラメトリック統計量」の研究成果を見ていただくことを重視し、この研究集会に参加した。両教授とも、まだ明確な意見を提示しておられない。つまり慎重に内容について見定める Look into, の段階であると筆者は受け止めている。

研究集会における発表の中で、筆者の研究の参考になると思われる発表があった。それは、Stoffer 教授の時系列解析における spectral density の一次結合を用いるアプローチである。これは現在筆者が研究しているヘッジファンドリターンデータ分析にも有効にかつ特徴的に使えるアプローチではないかと思われた。

また Hallin 教授の発表は、skew=symmetry の統計的推測問題についての彼の研究途上の話であったが、これは筆者がかつて行った変換モデルとしても表現できると思われた。もしそれが成功すれば、この問題をもっとノンパラメトリックに扱うことになるが今後検討したい。漸近理論の中で現れる量が観測を基準化した量の 3 乗であり（これは自然である）、収束の測度が観測個数の $1/6$ 乗であることが印象的であった。