Edgeworth Expansion for the studentized Kernel Quantile Estimator

前 園 宜 彦　　九州大学数理学研究院
Penev, Spiridon　The University of New South Wales

1. 序

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母集団分布 $F(x)$(密度関数 $f(x)$ を持つ) からの無作為標本とする．このとき p-確率点 $Q(p) = inf\{x : F(x) \geq p\}$ の推定問題に対して，密度関数のカーネル推定に基づく，カーネル型確率点推定量

$$\hat{Q}_{p,h_n} = \frac{1}{h_n} \int_0^1 F_n^{-1}(x) K(\frac{x-p}{h_n}) dx \tag{1}$$

について考察する．ここで $F_n^{-1}(x)$ は経験分布関数の逆関数，$K(\cdot)$ は適当な条件を満たすカーネル関数で，$h_n \to 0, (n \to \infty)$ はバンド幅である．Maesono & Penev (2009) は標準化カーネル型確率点推定量のエッジワース展開を残差項 $o(n^{-1/2})$ まで求めた．本講演ではジャックナイフ分散推定量の一致性を示し，スチューデント化カーネル型確率点推定量のエッジワース展開を残差項 $o(n^{-1/2})$ まで議論する．スチューデント化には次のジャックナイフ型分散推定量を使う．

$$\hat{\sigma}_n^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n \{\hat{Q}_{p,h_n}^{(i)} - \hat{Q}_{p,h_n}\}^2$$

ここで $\hat{Q}_{p,h_n}^{(i)}$ は X_i を除いた $n-1$ 個のサンプルに基づく対応する推定量であるが，簡単のために同じバンド幅を利用する．このときスチューデント化カーネル型確率点推定量

$$\hat{\sigma}_n^{-1} \sqrt{n} \{\hat{Q}_{p,h_n} - Q(p)\} \tag{2}$$

の分布のエッジワース展開を求める．なお本講演ではバンド幅について，次の仮定を置く．

$$h_n = o(n^{-1/4}) \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} (n^{1/4} h_n)^{-k} n^{-\beta} = 0$$

ただし $\beta > 0$ で k は正の自然数である．典型的なバンド幅は $h_n = n^{-1/4}(\log n)^{-1}$ である．

2. スチューデント化 $\hat{Q}_{p,h_n}$ のエッジワース展開

まず分散推定量の漸近表現を求め，それを利用してスチューデント化統計量の漸近表現を求めることができる．

Lemma 適当な正則条件の下で Hoeffding 分解された次の漸近表現を求めること

ができる．

(i)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_n^2 &= \sigma_n^2 + n^{-1}h_n^{-2}(e_{5n}+e_{6n}) + n^{-1}B_{1n} + 2n^{-1}h_n^{-1}\hat{B}_{1n} + 2n^{-2}h_n^{-2}B_{2n} \\ &\quad + o_\ell(n^{-1/2})\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\hat{\sigma}_n^{-1}\sqrt{n}\{\hat{Q}_{p,h_n} - Q(p)\} \\ &= \nu_n + d_{1n}A_{1n} + d_{2n}\Lambda_{2n} + d_{3n}\Lambda_{3n} + d_{3n}n\hat{\Lambda}_{1n} + o_\ell(n^{-1/2})\end{aligned} \tag{3}$$

ここで

$$P(|o_\ell(n^{-1/2})| \geq n^{-1/2}(\log n)^{-1}) = o(n^{-1/2})$$

である．

この表現を使うとエッジワース展開を次のように求めることができる．

Theorem カーネル関数 $K(\cdot)$ と分布関数に関する適当な条件の下で

$$\begin{aligned}&P\Big(\sqrt{n}\hat{\sigma}_n^{-1}\{\hat{Q}_{p,h_n} - Q(p)\} \leq x\Big) \\ &= \Phi(x) - \phi(x)\Big\{\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{-2x^2-1}{6n^{1/2}\sigma_n^3}e_{1n} + \frac{-x^2-1}{2n^{1/2}\sigma_n^3 h_n}e_{2n} \\ &\qquad + \frac{1}{nh_n^2}\Big[\frac{x}{4\sigma_n^2}(2e_{5n}-e_{6n}) + \frac{-x^3+3x}{2\sigma_n^4}e_{3n} \\ &\qquad - \frac{x^3-3x}{3\sigma_n^4}e_{4n} + \frac{x^5+2x^3-41x}{8\sigma_n^6}e_{2n}^2\Big]\Big\} + o(n^{-1/2})\end{aligned}$$

が成り立つ．

Remark 実際に利用する多くのカーネルは対称な関数が使われている (Sheather & Marron (1990, JASA) など)．もし $K(-x)=K(x)$ ならば $\int_{-1}^1 K'(x)dx = 0$ となり漸近展開は

$$\begin{aligned}&P\Big(\sqrt{n}\hat{\sigma}_n^{-1}\{\hat{Q}_{p,h_n} - Q(p)\} \leq x\Big) \\ &= \Phi(x) - \phi(x)\Big\{\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{-2x^2-1}{6n^{1/2}\sigma_n^3}e_{1n} + \frac{-x^2-1}{2n^{1/2}\sigma_n^3 h_n}e_{2n} \\ &\qquad + \frac{1}{nh_n^2}\Big[\frac{x}{2\sigma_n^2}e_{5n} - \frac{x^3-3x}{3\sigma_n^4}e_{4n}\Big]\Big\} + o(n^{-1/2})\end{aligned}$$

になる．

さらに高次のオーダーのカーネルでは，$\int_{-1}^1 K''(x)dx = 0$ の仮定を満たすものがある．もしこの仮定を満たせば漸近展開は

$$\Phi(x) - \phi(x)\Big\{\frac{\delta}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{-2x^2-1}{6n^{1/2}\sigma_n^3}e_{1n} + \frac{-x^2-1}{2n^{1/2}\sigma_n^3 h_n}e_{2n}\} + o(n^{-1/2})$$

と簡略化される．