Second-Order Properties of Bootstrap Methods for Dependent Data

白石 博（東京慈恵会医科大学）

Efron (1979) によって提案された bootstrap は、現在統計的推測論において、従来、理論や数式に基づく解析的アプローチが難しかった問題に対して、有効な解を与えることができるということで広く活用されている。しかしながら、Efron (1979) によって提案された手法は独立分布を仮定しているため、時間に従属性のある"dependent process"に対しては適用不可能であることが知られている。この問題に対し、いくつかの"dependent process"に対する bootstrap 手法が提案されている。

『block bootstrap method』は、"dependent process"に対する bootstrap 手法の代表的な手法であり、観測系列をいくつかのブロックに区切り、このブロックを無作為抽出する手法である。Block bootstrap methods の中でもいくつかの手法が提案されており、Moving Block Bootstrap (cf.Künsch(1989), Liu and Singh(1992)), Nonoverlapping Block Bootstrap (cf.Carlstein(1986)), Generalized Block Bootstrap (cf.Politis and Romano(1992)), Circular Block Bootstrap (cf.Politis and Romano(1992)) and Stationary Block Bootstrap (cf.Politis and Romano(1994)) などがある。

一方、時系列モデルを仮定して、その誤差項の推定量（この誤差項は独立な分布に従うと仮定する。）を構成し、これを無作為抽出する手法として『model based bootstrap method』がある。model based bootstrap method の中でもいくつかの手法が提案されており、AR モデルを仮定した Autoregressive Bootstrap (cf. Freedman (1981), Bose (1988)), ARMA モデルを仮定した Autoregressive and Moving Average Bootstrap (cf. Kreiss and Franke (1992)) などがある。

本報告では、一般的なモデルに対し、Nonoverlapping Block Bootstrap (NBB) と オーダー 1 の Autoregressive Bootstrap (AB(1)) を二次の漸近一致性に関して比較する。

bootstrap の高次の一致性を調べる道具として、エッジワース展開が有用である。NBB に関しては、Götze and Künsch (1996) などが二次の漸近一致性について証明している。また、ARB に関しては、Bose (1988) が AR パラメータに対して、モデルが AR 過程に従う場合のブートストラップ推定量の高次の漸近一致性を示している。本報告では、標本平均に対する両ブートストラップ手法の一致性のオーダーを、幾つかの時系列モデルに関して比較した。

$\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を $EX_i = 0$ を満たす weakly dependent な定常過程とする。このとき、

$$S_n = \sqrt{n}\bar{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

と定義すると、適当な正則条件の下次が成り立つ。(Götze and Hipp (1983))

命題 1

$$P(S_n \le x) = \Phi_\Sigma(x) - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\mu_3}{6\Sigma^{3/2}}(x^3 - 3x)\phi_\Sigma(x) + O(n^{-1}).$$

$S_n^{*(NBB)}$ を、Nonoverlapping Block Bootstrap(NBB) によって生成されたブートストラップ標本に基づく S_n とする。このとき、適当な正則条件の下次が成り立つ。(Götze and Künsch (1996))

命題 2　ブロック幅が $l = n^{1/4}$ ならば、次式が成り立つ。

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P^*(S_n^{*(NBB)} \le x) - P(S_n \le x) \right| = O_p(n^{-3/4}).$$

$S_n^{*(ARB)}$ を、Autoregressive Bootstrap(AR(1)B) によって生成されたブートストラップ標本に基づく S_n とする。このとき、適当な正則条件の下次が成り立つ。(Bose (1988))

命題 3

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P^*(S_n^{*(ARB)} \le x) - P(S_n \le x) \right| = \begin{cases} O_p(n^{-1}) & if\ \Sigma^* \xrightarrow{p} \Sigma\ and\ \mu_3^* \xrightarrow{p} \mu_3, \\ O_p(n^{-1/2}) & if\ \Sigma^* \xrightarrow{p} \Sigma\ and\ \mu_3^* \overset{p}{\not\to} \mu_3, \\ O_p(1) & if\ \Sigma^* \overset{p}{\not\to} \Sigma\ and\ \mu_3^* \overset{p}{\not\to} \mu_3 \end{cases}$$

References

[1] Bose, A. (1988) Edgeworth Correction by Bootstrap in Autoregressions. *The Annals of Statistics.* **16**, 1709-1722.

[2] Carlstein, E. (1986) The use of subseries methods for estimating the variance of a general statistic from a stationary time series. *The Annals of Statistics.* **14**, 1171-1179.

[3] Efron, B. (1979) Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics.* **7**, 1-26.

[4] Freedman, D. A. (1981) Bootstrapping regression models. *The Annals of Statistics.* **9**, 1218-1228.

[5] Götze, F. and Hipp, C. (1983) Asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete.* **64**, 211-239.

[6] Götze, F. and Künsch, H. R. (1996) Second-order correctness of the blockwise bootstrap for stationary observations. *The Annals of Statistics.* **24**, 1914-1933.

[7] Künsch, H. R. (1989) The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *The Annals of Statistics.* **17**,1217-1261.