A two-stage procedure for the location of a negative exponential distribution and second-order properties

新潟大学自然科学研究科　磯貝 英一
新潟大学自然科学研究科　小林 加奈

§1. 序

$X_1, X_2, \cdots$ は次の確率密度関数をもつ指数分布 $\mathrm{E_{XP}}(\mu,\sigma)$ に従う独立な確率変数列とする．

$$f_{\mu,\sigma}(x)=\sigma^{-1}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)I(x>\mu)$$

ただし，位置母数 $\mu\in R$ と尺度母数 $\sigma\in R^{+}$ はともに未知である．本報告では，位置母数 μ の信頼区間問題を考える．大きさ n の無作為標本 $X_1,\cdots,X_n$ に対して，

$$X_{n(1)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\},\quad U_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{n(1)})\quad \text{for}\quad n\ge 2$$

とするとき, μ を $X_{n(1)}$ で推定する．今，任意に与えられた区間幅 $d>0$ と信頼係数 $\alpha\in(0,1)$ に対して，μ の信頼区間を $I_n=[\,X_{n(1)}-d,\,X_{n(1)}\,]$ とする．目的は

(1.1) $$P\{\mu\in I_n\}\ge 1-\alpha\quad \text{for all fixed } \mu \text{ and }\ \sigma$$

を満たす最小の標本の大きさを持つ標本に基づいて μ を区間推定することである．$F(x)=1-e^{-x}$ を標準指数分布の分布関数とすると，$P\{\mu\in I_n\}=F(dn/\sigma)$ が分かる．もし $n\ge a\sigma/d\equiv C$（$a=\log\alpha^{-1}$）ならば，(1.1) が満たされる．C を**最適な固定標本数**とよぶと，σ は未知であるので C も未知である．

この問題に対する先行研究では，Stein の２段階法，修正２段階法，３段階法，純逐次法が提案され，一致性，漸近一致性，１次，２次漸近有効性についての結果が得られている．本報告では，σ_L **２段階法**を提案し，その性質を調べる．５つの手法の性質は次の表で与えられる．

手法	漸近一致性	一致性	１次漸近有効性	２次漸近有効性
Stein の２段階法	○	○	×	×
修正２段階法	○	○	○	×
３段階法	○	×	○	○
純逐次法	○	×	○	○
σ_L ２段階法（$\sigma>\sigma_L$ を仮定）	○	○	○	○

σ_L ２段階法

$\sigma>\sigma_L$（$\sigma_L>0$ は過去の経験などから分かっている既知な定数とする）を仮定したとき，標本抽出として次の σ_L ２段階法を提案する．

第１段階

(1.2) $$m=m(d)=\max\left\{m_0,\ \left[\frac{a\sigma_L}{d}\right]^{*}+1\right\}$$

ただし，$m_0\,(\ge 2)$ は前もって与えられた整数で，$[x]^{*}$ は x より小さい最大整数を表す．

第２段階

(1.3) $$N=N(d)=\max\left\{m,\ \left[\frac{b_m U_m}{d}\right]^{*}+1\right\}$$

ただし，b_m は自由度 $2, 2(m-1)$ の F 分布の上側 100α ％点である．

このとき，$P\{N<\infty\}=1$ となるので，$X_1,\cdots,X_N$ に基づいて，μ の信頼区間を $I_N=[\,X_{N(1)}-d,\,X_{N(1)}\,]$ で与える．

§2. 主結果

$\sigma > \sigma_L$ を仮定する．$I_N = [\,X_{N(1)} - d,\, X_{N(1)}\,]$ を μ の信頼区間とするとき，(1.2), (1.3) で定義される σ_L 2 段階法 N に関して，以下の結果が得られる．

定理 2.1.

1. $N/C \xrightarrow{a.s.} 1 \quad (d \to 0)$
2. $E(N/C) \to 1 \quad (d \to 0)$ （1 次漸近有効性）
3. $P\{\mu \in I_N\} \geq 1 - \alpha$ for all fixed μ, σ, d and α （一致性）

定理 2.2. $d \to 0$ とする．このとき，

$$\frac{a\sigma}{\sigma_L} + o(1) \leq E(N - C) \leq \frac{a\sigma}{\sigma_L} + 1 + o(1) \quad \text{（2 次漸近有効性）}$$

定理 2.3. $d \to 0$ とする．このとき，

$$C^{-1/2}(N - C) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma/\sigma_L) \quad \text{（漸近正規性）}$$

次の定理は被覆確率 $P\{\mu \in I_N\}$ の 2 次の漸近展開を与える．

定理 2.4. $d \to 0$ とする．このとき，

$$1 - \alpha + \frac{\alpha\, a}{2\sigma_L} d + o(d) \leq P\{\mu \in I_N\} \leq 1 - \alpha + \alpha\left(\frac{a}{2\sigma_L} + \frac{1}{\sigma}\right) d + o(d)$$

§3. シミュレーション結果

シミュレーション結果は 10,000 回の繰り返しの平均である．

表 $\mathrm{E_{XP}}(1,3)$， $\alpha = 0.05$， $\sigma_L = 1.5$ (上段) , 2.5 (下段)

C	d	$\overline{n}$	$\overline{n} - C$	E_{low}	E_{upper}	$\overline{p}$	P_{low}	P_{upper}
30	0.299571	33.87	3.87	5.99	6.99	0.955000	0.964957	0.969950
	0.299571	32.86	2.86	3.59	4.59	0.957900	0.958974	0.963967
50	0.179742	54.02	4.02	5.99	6.99	0.951400	0.958974	0.961970
	0.179742	53.22	3.22	3.59	4.59	0.956700	0.955385	0.958380
100	0.089871	105.10	5.10	5.99	6.99	0.957500	0.954487	0.955985
	0.089871	102.96	2.96	3.59	4.59	0.951500	0.952692	0.954190
200	0.044937	205.35	5.35	5.99	6.99	0.952500	0.952244	0.952993
	0.044937	204.39	4.39	3.59	4.59	0.952000	0.951346	0.952095
400	0.022468	406.55	6.55	5.99	6.99	0.951300	0.951122	0.951496
	0.022468	404.13	4.12	3.59	4.59	0.950700	0.950673	0.951048
800	0.011234	806.22	6.23	5.99	6.99	0.950700	0.950561	0.950748
	0.011234	804.25	4.26	3.59	4.59	0.950400	0.950337	0.950524

参考文献

E. Isogai and K. Kobayashi, A two-stage procedure for the location of a negative exponential distribution and second-order properties, Far East J. Thoer. Stat., 29 (2009), 221-236, to appear.