確率金利におけるノックアウトオプションの価格評価法

室井　芳史* ・ 山田　隆志†

1　はじめに

本研究では、確率金利モデル下における株式ノックアウトオプションの価格評価問題について考察を行った。ノックアウト・オプションはもっとも一般的な経路依存型商品であり、価格評価問題への関心の歴史は古い。、1970 年代に既に Merton(1973) により、ブラックショールズモデルにおける価格式が求められている。価格評価の研究それ自体が重要な問題である一方で、ノックアウト・オプションの研究は信用派生商品の価格評価問題への応用も知られており、さらなる重要度を持った研究といえる。

2　確率金利モデル

市場の金利が確率微分方程式

$$dr_t^\eta = \sqrt{\eta}c(r_t^\eta)dt + \sqrt{\eta}g(r_t^\eta)dZ_t \tag{2.1}$$

に従っているものとする。ここで、η とは小さな値を取るパラメータである。リスク中立確率測度の下では株式の価格は確率微分方程式

$$dS_t = S_t(r_t^\eta dt + \sigma dW_t),\ S_0 = s$$

を満たすものとする。この設定の下で、時刻 t までにオプションがノックアウトされていない場合にノックアウトオプションの価格 $C^\eta(s,t)$ は、

$$C^\eta(x,r,t) = E^Q[e^{-\int_t^T r_s^\eta ds}H(S_T)1_{\{M_t^T>l\}}|S_t = x, r_t^\eta = r] \tag{2.2}$$

と書くことができる。ファインマン・カッツの公式を使うと、この条件付期待値は偏微分方程式

$$\mathcal{N}^\eta C^\eta(x,r,t) = 0$$
$$C^\eta(l,r,t) = 0,\ C^\eta(x,r,T) = H(x)$$

*e-mail:ymuroi@econ.tohoku.ac.jp, Graduate School of Economics and Management, Tohoku University 27-1, Kawauchi Aoba-Ku, Sendai City, 980-8576, JAPAN.

†e-mail:tyamada@trn.dis.titech.ac.jp,Department of Computational Intelligence and Systems Science, Tokyo Institute of Technology.

4259 Nagatsuta-cho, Midori-ku, Yokohama, 226-8502, JAPAN.

の解になっていることが分かる。ここで作用素$\mathcal{N}^\eta$とは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}^\eta &= \mathcal{N}_0+\sqrt{\eta}\mathcal{N}_1+\eta\mathcal{N}_2 \\
\mathcal{N}_0 &= \mathcal{L}_{BS} \\
\mathcal{N}_1 &= c(r)\frac{\partial}{\partial r}+\rho\sigma x g(r)\frac{\partial^2}{\partial r\partial x} \\
\mathcal{N}_2 &= \frac{1}{2}g^2(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}
\end{aligned}
$$

のことである。また、C^ηは

$$C^\eta = C_0+\sqrt{\eta}C_1+\eta C_2+\cdots$$

という形で記述できるものと仮定する。ここで、0次オーダーの方程式を

$$
\begin{gathered}
\mathcal{N}_0 C_0(x,r,t)=0 \\
C_0(l,r,t)=0, \qquad C_0(x,r,T)=H(x)
\end{gathered}
$$

と定義する。また、1次オーダーの方程式を

$$
\begin{gathered}
\mathcal{N}_0 C_1(x,r,t)+\mathcal{N}_1 C_0(x,r,t)=0 \\
C_1(l,r,t)=0, \qquad C_1(x,r,T)=0
\end{gathered}
$$

で定義する。これらの方程式を順次解いていくことで、確率金利モデルでのノックアウトオプション価格の近似計算を行う。まず、0次オーダーの方程式を解くことで、メインの項C_0はブラック氏ショールズモデルにおけるのノックアウトオプションの価格と等しいことが分かる。また、1次オーダーの項C_1については

$$C_1 = C_1^1 + C_1^2$$

という分解が可能なことが分かった。C_1^1およびC_1^2とは

$$
\begin{aligned}
C_1^1(x,r,t) &= (T-t)(c(r)\frac{\partial}{\partial r}C_0+\rho\sigma g(r)x\frac{\partial^2}{\partial r\partial x}C_0) \\
&\quad -\frac{1}{2}(T-t)^2\{\rho\sigma g(r)x^2\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}+c(r)(x\frac{\partial C_0}{\partial x}-C_0)\} \\
C_1^2(x,r,t) &= \exp[\{-\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2-r\}(T-t)-\frac{1}{\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\log x]v(t,\log x)
\end{aligned}
$$

のことである。ここで、関数$v(t,z)$は

$$
\begin{aligned}
v(t,z) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^T\frac{(z-L)}{(s-t)^{3/2}}e^{-(z-L)^2/2\sigma^2(s-t)}\tilde{h}(t)dt \\
\tilde{h}(t) &= \exp[\{\frac{1}{2\bar{\sigma}^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2+r\}(T-t)]l^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}}h(t) \\
L &= logl
\end{aligned}
$$

で与えれる。よって、積分を一度計算するだけで、確率金利モデルにおけるノックアウトオプションの価格の近似的な値が計算できる。