α-リスク最小化ポートフォリオの
セミパラメトリック有効性について

谷合 弘行

シンポジウム「統計的推測・確率解析とその周辺の話題の理論と応用」
2009 年 12 月 12 日、カレッジプラザ（秋田）

本発表では、複数の金融資産を組み替えることで α-リスクと呼ばれる量を最小化する問題について考察をした。特にセミパラメトリック統計的視点から捉える事により、統計学的に見てより効率的と言えるものへ改善できることも指摘した。以下にその概要を記す。

まず、ここで考察の対象とした“ α-リスク ”とは以下のように定義される $\varrho_{\nu_\alpha}(X)$ のことである。分布関数 F_X に従う確率変数 X について、$\nu_\alpha(t) = \min\{t/\alpha, 1\}$、$\alpha \in [0, 1]$ として

$$\varrho_{\nu_\alpha}(X) := -\int_0^1 F_X^{\leftarrow}(t) d\nu_\alpha(t) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{\leftarrow}(t)dt. \tag{1}$$

ただし $F_X^{\leftarrow}(\alpha) := \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$ である。金融資産を配分率 $\boldsymbol{\pi} := (\pi_1, \ldots, \pi_p)^\top$ で組み合わせたもの（ポートフォリオ）について、その平均値を固定した下で、その α-リスク $\varrho_{\nu_\alpha}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{\pi})$ を最小化する問題を考える。この最適化問題を Koenker and Bassett (1978) の分位数回帰 (Quantile Regression, QR) の係数を求める問題に帰着させられることは Bassett et al. (2004) により示されている。本発表では、さらに分位数回帰が本質的にはセミパラメトリックなモデル化であることに注目した。すなわち、QR モデルとは条件付きクオンタイル関数 $F_{X|S}^{\leftarrow}(\alpha) := \inf\{x : P(X \leq x|S) \geq \alpha\}$ を用いて $F_{Z_i|\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{w}_i}^{\leftarrow}(\alpha) = \boldsymbol{w}_i^\top\boldsymbol{\beta}(\alpha)$ と表わされるものであるが、これは例えば以下に示すような分位数制約を持つモデルに包含される。

$$\begin{aligned} &Z_i = \boldsymbol{W}_i^\top\boldsymbol{b} + \xi_i, \qquad \xi_i \overset{iid}{\sim} G_0, \\ &\text{s.t. } g_0 \in \mathcal{F}^\alpha := \left\{f \,\middle|\, \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \alpha = 1 - \int_0^\infty f(x)dx\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

ある与えられた QR モデルに対して考えられるこのような分位数制約を持つモデルは一意ではないが、このモデルが局所漸近正規性 (LAN) を満たす事が判っているならば それに基づいてセミパラメトリック有効性を考える事ができる。

そこで、初めに QR で得た推定量に対して適切な改善を施す事でセミパラメトリック有効性を実現できることを示した。具体的には、分位数回帰により得られた最適ポートフォ

リオ配分率に対して Hallin and Werker (2003) のランク統計量・符号統計量を用いた方法を適用した。

この応用として、多期間での最適配分問題にも言及した。まず、$A := \pi_1 X_t + \pi_2 X_{t-1}$ を上で言うところの“ポートフォリオ”とみなして同様の α-リスク最小化を考えた。これは扱っている金融資産が 1 種類であり、その定常性も仮定したので、上のような平均値に関する操作は不能である。しかし、投資可能な資金を一度に投入してしまうのではなく、多期間に渉って適切に投入する事でその金融資産への投資に関する α-リスクはより低く抑えられる、という話である。

先のポートフォリオ最適化が通常の分位数回帰モデルに帰着されたように、この多期間最適配分問題は分位数自己回帰 (Quantile AutoRegression, QAR) に対応する。そこで始めに (2) のように加法的に誤差項を導入すると、分位数制約付き自己回帰モデルという時系列に関する問題を解けば十分と判る。ただしそのモデルが LAN を満たすためと仮定することが妥当かどうかは価格過程 $\{X_t\}$ の実現値の依存関係による。注意すべきは、我々が分位数回帰モデルを考えている時点では、価格過程 $\{X_t\}$ の実現確率の依存関係にしか言及していなかった点である。

続いて、A を構成する金融資産 $\{X_t\}$ について追加的な条件を課して、次のような乗法的な誤差項を導入するモデルからの考察を与えた。

$$X_t = \left(\frac{\theta}{1-\pi_2} + \frac{\pi_2}{1-\pi_2} X_{t-1} \right) \zeta_t \overset{(say)}{=} (\boldsymbol{W}_{t-1}^{B\top} \boldsymbol{\gamma}) \zeta_t \tag{3}$$

$$\zeta_t \overset{iid}{\sim} G_1, \quad g_1 \in \mathcal{F}_{\pi_1}^{\alpha} := \left\{ f \middle| F^{\leftarrow}(\alpha) = \frac{1}{1-\pi_2} \right\}$$

これに関して同様にセミパラメトリック有効な推定量の構築を示したが、具体的には Taniai and Hallin (2006) の内容を援用した。

最後に、より複雑な（分位数制約付き）時系列について LAN が判っているからといってそれが必ずしもポートフォリオ最適化問題を改善するものではないという点に触れた。同時に未解決のテーマとして、複数の金融資産で構成されるポートフォリオに関する多期間最適配分問題は Mixture Model から考察すべきか否かといった点についても私見を述べて発表の締めとした。

参考文献

Bassett, G. W. J., Koenker, R., and Kordas, G. (2004). Pessimistic portfolio allocation and choquet expected utility. *Journal of Financial Econometrics*, 2(4):477–492.

Hallin, M. and Werker, B. J. M. (2003). Semi-parametric efficiency, distribution-freeness and invariance. *Bernoulli*, 9(1):137–165.

Koenker, R. and Bassett, Jr., G. (1978). Regression quantiles. *Econometrica*, 46(1):33–50.

Taniai, H. and Hallin, M. (2006). Semiparametric efficienccy of quantile regression in an ARCH context. (Unpublished document).