Testing problem for unit root process generated by locally stationary processes

新潟大学　理学部　定方　真子
新潟大学　理学部　蛭川　潤一

ランダムウォークは 1 次の自己回帰（AR(1)）モデルの係数が 1 の場合に相当し、非定常過程のクラスである単位根過程に含まれる。ランダムウォークの部分和過程は標準ブラウン運動に分布収束することがよく知られている。この事実は汎関数中心極限定理 (FCLT) と呼ばれる。Beveridge-Nelson (B-N) 分解と呼ばれる手法を使うと、ランダムウォークのイノベーション過程を i.i.d. 過程から、線形過程に一般化することが出来る。本講演では、局所定常過程 (LSP) をイノベーション過程に持つ、単位根過程や単位根近接モデルについて FCLT を導いた。局所定常過程も非定常過程であるので、これらのモデルは、二つの異なるタイプの非定常性を表現することができる。

ランダムウォークはその非定常性により、最小二乗推定量 (LSE) が漸近正規性を持たないことが知られている。そこで、LSP イノベーションを持つ単位根過程の LSE の極限分布も導いた。また LSE の極限分布を用いた検定方式を提案した。

LSP イノベーションを持つ単位根過程：

$$\begin{aligned} x_{j,T} &= x_{j-1,T} + u_{j,T} \\ &= x_{0,T} + \sum_{i=1}^{j} u_{i,T} \end{aligned}$$

ここに

$$u_{j,T} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left(\frac{j}{T}\right) \varepsilon_{j-l} = \int_{-\pi}^{\pi} A\left(\frac{j}{T}, \lambda\right) e^{ij\lambda} d\xi(\lambda)$$

$x_{0,T} = \sigma\sqrt{T}X(0)$, $X(0) \sim N(\gamma_X, \delta_X^2)$, $X(0) \perp \{\varepsilon_j\}$

部分和過程：

$$X_T(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} x_{j,T} + T\left(t - \frac{j}{T}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} u_{j,T} \qquad \left(\frac{j-1}{T} \le t \le \frac{j}{T}\right)$$

定理 1 (LSP イノベーションを持つ単位根過程についての FCLT).

$$X_T \;\Rightarrow\; h^{(1)}(X(0), W) \equiv X$$

ここに

$$h_t^{(1)}(x, y) = x + \alpha(t, 1)\, y(t) - \int_0^t \alpha'(\nu, 1)\, y(\nu) d\nu$$

$$\Longrightarrow\; dX(t) = A(t, 0)\, dW(t)$$

AR(1) モデル $x_{j,T} = \rho x_{j-1,T} + u_{j,T}$ の最小二乗推定量：

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{j=2}^{T} x_{j-1,T} x_{j,T}}{\sum_{j=2}^{T} \left(x_{j-1,T}\right)^2}$$

$S_{1,T} = T\left(\hat{\rho} - 1\right)$ の極限分布：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(S_{1,T}\right) = \mathcal{L}\left(T\left(\hat{\rho}-1\right)\right) \\
&\to \mathcal{L}\left(\frac{\frac{1}{2}\left\{X\left(1\right)^2 - X\left(0\right)^2 - \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\left(\nu\right)^2 d\nu\right\}}{\int_0^1 X\left(\nu\right)^2 d\nu}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{\int_0^1 X\left(\nu\right) dX\left(\nu\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left\{\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\left(\nu\right)\right\}^2 - \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\left(\nu\right)^2\right] d\nu}{\int_0^1 X\left(\nu\right)^2 d\nu}\right)
\end{aligned}$$

検定問題：

$$H_0 : \rho = 1 \qquad H_1 : \rho = 1 - \frac{\beta}{T}.$$

$$Z_\rho = S_{1,T} + \frac{\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} \hat{u}_{j,T}^2 - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{f}\left(\frac{t}{T}, 0\right)}{2\frac{1}{T^2}\sum_{j=2}^{T} x_{j-1,T}^2}, \quad \hat{u}_{j,T} = x_{j,T} - x_{j-1,T}$$

ノンパラメトリック時変スペクトル密度関数推定量 $\hat{f}(u,\lambda)$：

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u,\lambda_l) &= M\int K\left(M(\lambda_l - \mu)\right) I_N(u,\mu) d\mu \\
&\approx \frac{2\pi M}{T} \sum_{k=-\frac{T}{4\pi M}+l}^{\frac{T}{4\pi M}+l} K\left(M(\lambda_l - \mu_k)\right) I_N(u,\mu_k) \\
K(x) &= 6\left(\frac{1}{4} - x^2\right),\ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad M = T^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

局所ペリオドグラム $I_N(u,\lambda)$：

$$\begin{aligned}
I_N(u,\lambda) &= \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{s=1}^{N} h\left(\frac{s}{N}\right) X_{[uT]-N/2+s,T} e^{-i\lambda s}\right|^2 \\
h(x) &= \left\{6x(1-x)\right\}^{\frac{1}{2}},\ x \in [0,1], \quad N = T^{\frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

H_0 の下で

$$\mathcal{L}\left(Z_\rho\right) \to \mathcal{L}\left(\frac{U}{V}\right)$$

$$U = \int_0^1 X\left(\nu\right) dX\left(\nu\right), \quad V = \int_0^1 X\left(\nu\right)^2 d\nu$$