分割表における周辺点対称性に関する尺度

鈴木　元子　(東京理科大学大学院・理工学研究科)
山本　紘司　(東京理科大学・理工学研究科)
田畑　耕治　(東京理科大学・理工学部)
富澤　貞男　(東京理科大学・理工学部)

正方分割表において，Wall and Lienert (1976) は点対称モデルを提案した．Tomizawa (1985) はこの点対称モデルを $r \times c$ 分割表に拡張した．さらに Tomizawa (1985) はこの点対称モデルの制約を緩めた周辺点対称モデルも導入した．

$r \times c$ 分割表において，行変数を X，列変数を Y とする．また，X が i，Y が j をとる確率を p_{ij} とする $(i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, c)$．周辺点対称モデル（Tomizawa, 1985）は次のように定義される：

$$p_{i\cdot} = p_{i^*\cdot} \quad (i = 1, \ldots, r),$$

かつ

$$p_{\cdot j} = p_{\cdot j^{**}} \quad (j = 1, \ldots, c),$$

ここに，$p_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{c} p_{it}$，$p_{\cdot j} = \sum_{s=1}^{r} p_{sj}$，$i^* = r + 1 - i$，$j^{**} = c + 1 - j$．このモデルは X と Y の各分布が点対称的であることを示している．

分割表データに対して点対称モデルの当てはまりが悪いとき，点対称性からの隔たりがどの程度なのかを知ることにも関心がある．Tomizawa, Yamamoto and Tahata (2007) は点対称性からの隔たりを測る尺度を提案している．

本講演では，周辺点対称モデルが成り立たないとき，周辺点対称性からの隔たりを測る尺度を提案した．

$\{p_{i\cdot} + p_{i^*\cdot} \neq 0\}$, $\{p_{\cdot j} + p_{\cdot j^{**}} \neq 0\}$ とし，

$$\left[\frac{r}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{r}{2} & (r\text{ が偶数のとき}), \\ \dfrac{r-1}{2} & (r\text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

$$\left[\frac{c}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{c}{2} & (c\text{ が偶数のとき}), \\ \dfrac{c-1}{2} & (c\text{ が奇数のとき}), \end{cases}$$

とする．また

$$q_{i\cdot} = \frac{p_{i\cdot}}{\delta_1}, \quad q_{i^*\cdot} = \frac{p_{i^*\cdot}}{\delta_1}, \quad q_{i\cdot}^{\mathrm{MPS}} = \frac{q_{i\cdot} + q_{i^*\cdot}}{2}, \quad \left(i = 1, \ldots, \left[\frac{r}{2}\right]\right),$$

$$q_{\cdot j} = \frac{p_{\cdot j}}{\delta_2}, \quad q_{\cdot j^{**}} = \frac{p_{\cdot j^{**}}}{\delta_2}, \quad q_{\cdot j}^{\mathrm{MPS}} = \frac{q_{\cdot j} + q_{\cdot j^{**}}}{2}, \quad \left(j = 1, \ldots, \left[\frac{c}{2}\right]\right),$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{[\frac{r}{2}]} (p_{i\cdot} + p_{i^*\cdot}), \quad \delta_2 = \sum_{j=1}^{[\frac{c}{2}]} (p_{\cdot j} + p_{\cdot j^{**}}),$$

とする．このとき，周辺点対称性からの隔たりを測る尺度を次のように提案した：

$$\Psi^{(\lambda)} = \frac{\delta_1 \psi_1^{(\lambda)} + \delta_2 \psi_2^{(\lambda)}}{\delta_1 + \delta_2} \qquad (\lambda > -1)$$

ただし，

$$\psi_1^{(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2^\lambda - 1} I_1^{(\lambda)} \left(\{q_{i\cdot}\}; \{q_{i\cdot}^{\mathrm{MPS}}\}\right),$$

$$I_1^{(\lambda)}(\cdot;\cdot) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^{[\frac{r}{2}]} \left[q_{i\cdot} \left\{ \left(\frac{q_{i\cdot}}{q_{i\cdot}^{\mathrm{MPS}}} \right)^\lambda - 1 \right\} + q_{i^*\cdot} \left\{ \left(\frac{q_{i^*\cdot}}{q_{i\cdot}^{\mathrm{MPS}}} \right)^\lambda - 1 \right\} \right],$$

$$\psi_2^{(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2^\lambda - 1} I_2^{(\lambda)} \left(\{q_{\cdot j}\}; \{q_{\cdot j}^{\mathrm{MPS}}\}\right),$$

$$I_2^{(\lambda)}(\cdot;\cdot) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{j=1}^{[\frac{c}{2}]} \left[q_{\cdot j} \left\{ \left(\frac{q_{\cdot j}}{q_{\cdot j}^{\mathrm{MPS}}} \right)^\lambda - 1 \right\} + q_{\cdot j^{**}} \left\{ \left(\frac{q_{\cdot j^{**}}}{q_{\cdot j}^{\mathrm{MPS}}} \right)^\lambda - 1 \right\} \right],$$

であり，$\psi_i^{(0)}$ $(i = 1, 2)$ は $\lim_{\lambda \to 0} \psi_i^{(\lambda)}$ で定義する．

さらにこの尺度の性質や，尺度の有用性などを実データを用いた応用例とともに示した．

参考文献

Tomizawa, S. (1985). The decompositions for point-symmetry models in two-way contingency tables. *Biometrical Journal* **27**, 895-905.

Tomizawa, S., Yamamoto, K. and Tahata, K. (2007). An entropy measure of departure from point-symmetry for two-way contingency tables. *Symmetry: Culture and Science; Journal of International Symmetry Association* **18**, 279-297.

Wall, K. D. and Lienert, G. A. (1976). A test for point-symmetry in J-dimensional contingency-cubes. *Biometrical Journal* **18**, 259-264.