順序カテゴリ分割表における順序準対称モデルについて

生亀清貴　（東京理科大学大学院理工学研究科）
田畑耕治　（東京理科大学理工学部）
山本英晴　（中外製薬（株））
富澤貞男　（東京理科大学理工学部）

本講演では順序カテゴリ分割表における順序準対称モデルについて，第一部「順序準対称モデルを用いた対称モデルの分解」，第二部「リジット型準対称モデルを用いた対称モデルの分解」について述べた．

第一部：順序準対称モデルを用いた対称モデルの分解

行と列が順序のある同じ分類からなる正方 $R \times R$ 分割表を考え，(i, j) セル確率を p_{ij} とする $(i = 1, \ldots, R; j = 1, \ldots, R)$. Agresti (1983) は線形対角パラメータ対称 (LDPS) モデルを導入した：

$$p_{ij} = \begin{cases} \delta^{j-i}\psi_{ij} & (i < j), \\ \psi_{ij} & (i \geq j), \end{cases}$$

ただし $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. 特に $\delta = 1$ とおいた LDPS モデルは対称（S）モデル (Bowker, 1948) である．Tomizawa (1991) は拡張 LDPS (ELDPS) モデルを提案した：

$$p_{ij} = \begin{cases} \delta^{j-i}\gamma^{(j-i)(j+i)/2}\psi_{ij} & (i < j), \\ \psi_{ij} & (i \geq j), \end{cases}$$

ただし，$\psi_{ij} = \psi_{ji}$. 特に $\gamma = 1$ のときは LDPS モデルである．

順序カテゴリ分割表において，X と Y をそれぞれ行変数と列変数とし，それぞれに整数スコア $u_i = i$（$i = 1, \ldots, R$）を割りふるとする．平均一致 (ME) モデルを次のように定義する：$\mu_1 = \mu_2$, ただし，$\mu_1 = \sum_{k=1}^{R} kp_{k\cdot}$,　$\mu_2 = \sum_{k=1}^{R} kp_{\cdot k}$. ここに $p_{i\cdot} = \sum_t p_{it}$，$p_{\cdot i} = \sum_s p_{si}$. このとき Yamamoto et al. (2007) は次の分解定理「S モデルが成り立つための必要十分条件は，LDPS モデルと ME モデルの両方が成り立つことである」を与えた．次に，分散一致 (VE) モデルを以下のように定義する：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, ただし，$\sigma_1^2 = \sum_{k=1}^{R}(k - \mu_1)^2 p_{k\cdot}$,　$\sigma_2^2 = \sum_{k=1}^{R}(k - \mu_2)^2 p_{\cdot k}$. このとき Yamamoto et al. (2007) は分解定理「S モデルが成り立つための必要十分条件は，ELDPS モデル，ME モデル及び VE モデルのすべてが成り立つことである」を与えた．このとき，次の定理を示した（Tahata et al., 2008）：

定理 1.　次の漸近的同等性が成り立つ：$G^2(S) \simeq G^2(LDPS) + G^2(ME)$.

ここに $G^2(M)$ はモデル M の尤度比カイ二乗統計量．平均分散一致（MV）モデル：$\mu_1 = \mu_2$　かつ　$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を導入し，次の補題と定理を得た（Tahata et al., 2008）：

補題 1.　S モデルが成り立つための必要十分条件は，ELDPS モデルと MV モデルの両方が成り立つことである．

定理 2. 次の漸近的同等性が成り立つ：$G^2(S) \simeq G^2(ELDPS) + G^2(MV)$.

第二部：リジット型準対称モデルを用いた対称モデルの分解

正方 $R \times R$ 分割表において, (i,j) セル確率を p_{ij} とする ($i = 1,\ldots,R$; $j = 1,\ldots,R$). また, X と Y をそれぞれ行変数と列変数とする. 準対称 (QS) モデルは次のように定義される (Caussinus, 1965):

$$p_{ij} = \mu\alpha_i\beta_j\psi_{ij} \quad (i = 1,\ldots,R;\ j = 1,\ldots,R),$$

ただし $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. 特に $\{\alpha_i = \beta_i\}$ のとき, 対称（S）モデルであり，$\{\alpha_i = \alpha^i\}$ かつ $\{\beta_j = \beta^j\}$ とおいた QS モデルは線形対角パラメータ対称（LDPS）モデル（Agresti, 1983）である．また，カテゴリに既知のスコア $u_1 \le \cdots \le u_R$ を割りふることができるとき，$\{\alpha_i = \alpha^{u_i}\}$ かつ $\{\beta_j = \beta^{u_j}\}$ とおいた QS モデルは順序準対称（OQS）モデル（Agresti, 2002）であり次のように表される：$p_{ij} = \delta^{u_j - u_i}p_{ji} \quad (i < j)$.

行変数, 列変数の周辺リジットは次のように定義される (Bross, 1958):$r_i^X = \sum_{k=1}^{i-1} p_{k\cdot} + p_{i\cdot}/2, \quad r_i^Y = \sum_{l=1}^{i-1} p_{\cdot l} + p_{\cdot i}/2$ $(i = 1,\ldots,R)$, ただし $p_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{R} p_{it},\ p_{\cdot i} = \sum_{s=1}^{R} p_{si}$. 平均リジットを次のように定義する:$v_i = (r_i^X + r_i^Y)/2 \quad (i = 1,\ldots,R)$. ここに $\{v_i\}$ は未知で $v_1 < \cdots < v_R$ であることに注意する. リジット型準対称（RQS）モデルを次のように導入した（Iki et al., 2009）:

$$p_{ij} = \begin{cases} \theta^{v_j - v_i}\psi_{ij} & (i < j), \\ \psi_{ij} & (i \ge j), \end{cases}$$

ただし $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. さらに，RQS モデルと平均一致 (ME) モデル（第一部参照）を用いて次の定理を得た（ Iki et al., 2009）：

定理 3. S モデルが成り立つための必要十分条件は, RQS モデルと ME モデルの両方が成り立つことである.

参考文献

Agresti, A. (1983). *Statistics and Probability Letters*, **1**, 313-316.

Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis* 2nd edition. Wiley, New York.

Bowker, A. H. (1948). *Journal of the American Statistical Association*, **43**, 572-574.

Bross, I. D. J. (1958). *Biometrics*, **14**, 18-38.

Caussinus, H. (1965). *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, **29**, 77-182.

Iki, K., Tahata, K. and Tomizawa, S. (2009). *Austrian Journal of Statistics*, **38**, 183-192.

Tahata, K., Yamamoto, H. and Tomizawa, S. (2008). *Austrian Journal of Statistics*, **37**, 185-194.

Tomizawa, S. (1991). *Metron*, **49**, 401-409.

Yamamoto, H., Iwashita, T. and Tomizawa, S. (2007). *Austrian Journal of Statistics*, **36**, 291-306.