正方分割表における正規分布型の対称性に関するモデル

倉上　弘幸　(東京理科大学大学院・理工学研究科)
山本　紘司　(東京理科大学・理工学部)
田畑　耕治　(東京理科大学・理工学部)
岩下登志也　(東京理科大学・理工学部)
富澤　貞男　(東京理科大学・理工学部)

第 1 部：正規分布型対称モデル

行と列が同じ分類からなる正方分割表において，Agresti (1983) は線形対角パラメータ対称（LDPS）モデルを提案し，分割表の行変数と列変数が連続量で，周辺分散が等しい潜在的な 2 変量正規分布が想定される場合，LDPS モデルはその分割表データによく適合するかもしれないことを指摘した．本報告では，セル確率そのものが周辺分散の等しい 2 変量正規分布の密度関数と同様な構造をもつ正規分布型対称モデルを提案した．以下にその概要を述べる．

行と列が順序のある同じ分類からなる正方 $R \times R$ 分割表において，(i, j) セル確率を p_{ij} とする（$i = 1, \ldots, R; j = 1, \ldots, R$）．このとき正規分布型対称（NDS）モデルを次のように提案した（Tahata, Yamamoto and Tomizawa, 2009）：

$$p_{ij} = \xi \alpha_1^{(i-j)^2} \alpha_2^{i-j} \beta_1^{(i+j)^2} \beta_2^{i+j} \quad (i = 1, \ldots, R; j = 1, \ldots, R).$$

正方分割表において行変数を X，列変数を Y とする．NDS モデルの下で，$\alpha_2 > 1$ は $\mathrm{P}(X \le i) < \mathrm{P}(Y \le i)$，$i = 1, \ldots, R-1$ と同値である．すなわち，NDS モデルのパラメータ α_2 は，X が Y より確率的に小さい（あるいは大きい）という推測をするのに役立つ．

ここで，

$$p^*_{uv} = p_{\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}} \quad ((u, v) \in S^*),$$

$$S^* = \{(u, v) \mid u = i - j, v = i + j \quad (i = 1, \ldots, R; j = 1, \ldots, R)\},$$

とする．このとき，NDS モデルは

$$p^*_{uv} = \xi \alpha_1^{u^2} \alpha_2^{u} \beta_1^{v^2} \beta_2^{v} \quad ((u, v) \in S^*)$$

のようにも表せる．これは $U = X - Y$，$V = X + Y$ とすると，NDS モデルは U と V の準独立性の構造を示している．NDS モデルは Goodman（1985）のダイヤモンドモデルの特別な場合であることに注意する．

さらに NDS モデルのより詳細な性質や実データを用いた解析例も報告した．

第 2 部：汚染正規型対称モデルと対称モデルの分解

行と列が同じ分類からなる正方分割表において，Agresti（1983）は，本来行変数と列変数が連続量で，周辺分散が等しい潜在的な 2 変量正規分布が想定される場合には，その正方分割表データに対して線形対角パラメータ対称（LDPS）モデルがよく適合するかもしれないことを示した．

本報告では，潜在分布として周辺分散が等しい 2 つの 2 変量正規分布の $1-\varepsilon$ と ε の割合での混合である ε-汚染正規分布が想定される場合に適切であると考えられるモデル（CNS モデル）を次のように導入した：$R \times R$ 正方分割表において (i, j) セル確率を p_{ij} としたとき，$0 < \varepsilon < 1$，$\gamma \neq 1$ に対して

$$p_{ij} = (1-\varepsilon)\mu\alpha^i\beta^j\psi_{ij} + \varepsilon\frac{\mu}{\gamma}(\alpha^i\beta^j\psi_{ij})^{\frac{1}{\gamma}} \quad (i = 1, \ldots, R; j = 1, \ldots, R),$$

ただし，$\psi_{ij} = \psi_{ji}$（Yamamoto, Kurakami, Iwashita and Tomizawa, 2008）．このモデルは 2 つの LDPS モデルの重み付きの和の構造をしている．

また，このモデルを用いて対称モデル (Bowker, 1948) に関する分解定理を得た．さらに，CNS モデルやモデルの分解定理の有用性を，人工データや実データを用いた応用例とともに示した．

参考文献

Agresti, A. (1983). A simple diagonals-parameter symmetry and quasi-symmetry model. *Statistics and Probability Letters* **1**, 313-316.

Bowker, A. H. (1948). A test for symmetry in contingency tables. *Journal of the American Statistical Association* **43**, 572-574.

Goodman, L. A. (1985). The analysis of cross-classified data having ordered and/or unordered categories: association models, correlation models, and asymmetry models for contingency tables with or without missing entries. *Annals of Statistics* **13**, 10-69.

Tahata, K., Yamamoto, K. and Tomizawa, S. (2009). Normal distribution type symmetry model for square contingency tables with ordered categories. *The Open Statistics and Probability Journal* **1**, 32-37.

Yamamoto, K., Kurakami, H., Iwashita, T. and Tomizawa, S. (2008). Contaminated normal type symmetry model and decomposition of symmetry for square contingency tables. *Journal of Statistical Theory and Practice* **2**, 651-661.