科研費研究集会

集会名「統計推測理論の最近の展開とその周辺」

（Recent Advances in Statistical Inference and Related Fields）

日時：２００８年９月１７日（水）-９月１９日（金）

場所：佐渡島開発総合センター　第３研修室

科研費・基盤研究Ａ「統計科学における数理的手法の理論と応用」

研究代表者：谷口正信 (早稲田大)

開催責任者：蛭川潤一（新潟大），磯貝英一（新潟大），天野友之（早稲田大）

プログラム

９月１７日（水）

Opening 14:20-30　谷口正信（早稲田大）

座長　白石博（早稲田大）

14:30-15:15　小方浩明（早稲田大）

Empirical likelihood estimation for dependent stable distributions

15:15-16:00　天野友之（早稲田大）

Comparison of Whittle type portmanteau tests

16:00-16:45　筑瀬靖子（香川大・名誉教授）

Statistical Analysis on Complex Multivariate Spaces and Manifolds

９月１８日（木）午前

座長　小方浩明（早稲田大）

9:15-10:00　清水邦夫*（慶應義塾大，統計数理研究所・客員）, S.H. Ong（University of Malaya）

An extension of the non-central negative binomial distribution

10:00-10:45　阿部俊弘*（慶應義塾大），清水邦夫（慶應義塾大）

A family of flat-topped distributions on the circle

10:45-11:30　達川真史*（大阪府立大），田中 秀和（大阪府立大）

LINEX 損失関数の下での多変量正規分布における線型推定量の許容性と非許容性について

９月１８日（木）午後 I

座長　塩濱敬之（東京理科大）

13:15-14:15　柿沢佳秀（北海道大）

非正規多変量母集団の平均推測の高次漸近論：最近の発展を中心に

14:15-15:15　三浦良造*（一橋大），横内大介（一橋大），青木義充（クイック（株））

ヘッジファンド・リターンデータの自己回帰性と平均分散などの統計値との関連性について

９月１８日（木）午後 II
座長　田中秀和（大阪府立大）

15:30-16:15　白石博（早稲田大）
Resampling procedure in estimation of optimal portfolios for time-varying ARCH processes
16:15-17:00　福元健太郎 *（学習院大），増山幹高（慶應義塾大）
Judging Judicial (In)dependence: Split Population Survival Analysis with Left Truncation and Average Treatment Effects on Time and Event

９月１９日（金）
座長　天野友之（早稲田大）

9:15-10:00　布能英一郎（関東学院大）
分割表解析における準対称性とその周辺
10:00-10:45　本田哲弘 *（東京理科大）, 塩濱敬之（東京理科大）
閾値を持つ金利の期間構造モデルのパラメータ推定方法
10:45-11:30　宮田庸一（高崎経済大）
有限混合分布による測定データの評価について

Closing 11:30-40　磯貝英一（新潟大）

Empirical likelihood estimation for dependent stable distributions

小方 浩明 (早稲田大学国際教養学部)

1 Intoroduction

非母数的な最尤法として研究されてきた経験尤度法を，イノベーションが symmetric α-stable distribution に従うような線形過程に対して適用することを考える．α-stable distribution は，$\alpha < 2$ のとき，正規分布よりも裾が重い分布となり分散が存在しない．例えばファイナンス分野で見受けられる分布は，しばしばこのような分布であることが経験的に知られており，それゆえこの裾の重い分布への研究が近年盛んに行われている．

また，Owen (1988) によって提唱された経験尤度法は，非母数的な尤度関数を用いて平均や分散などの基本量の検定や区間推定などを行うものであり，Qin and Lawless(1994) などによっても研究が進められてきた．経験尤度法はその一般性や有用性から，特に独立標本に対して，さまざまな研究がなされてきた．Kunitomo and Owada (2006) ではこの経験尤度法を i.i.d. stable distribution のパラメータ推定に対して応用している．本報告ではその拡張として，dependent α-stable distribution に対して経験尤度法を用い，i.i.d. の場合と比べどのように違ってくるかを考察する．

2 Setting

以下のような線形過程

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j,\boldsymbol{\xi}} Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi \subset \mathbb{R}^q$$

を考える．ここにイノベーション Z_t は i.i.d. symmetric α-stable distribution であり，その特性関数は

$$E[e^{i\eta Z_1}] = e^{-\gamma|\eta|^\alpha}$$

のように表され，パラメータ空間は

$$\Theta = \{0 < \alpha < 2, \gamma > 0, \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathbb{R}^q\}.$$

のように与えられる．このとき，X_t の特性関数は

$$E[e^{i\eta X_t}] = \exp\Big\{-\gamma|\eta|^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha\Big\} =: \phi_{\boldsymbol{\theta}}(\eta)$$

となるため，推定関数を

$$\boldsymbol{g}(X_t; \boldsymbol{\theta}) = \big(\cos(\eta_1 X_t) - \phi_{\boldsymbol{\theta}}(\eta_1), \ldots, \cos(\eta_m X_t) - \phi_{\boldsymbol{\theta}}(\eta_m)\big)' \quad (m \times 1 \text{ vector})$$

とおく．このとき，真のパラメータ $\boldsymbol{\theta}_0$ は $E_{\boldsymbol{\theta}_0}[\boldsymbol{g}(X_t, \boldsymbol{\theta}_0)] = \mathbf{0}$ を満たす.

また、経験最尤推定量 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ は

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \prod_{t=1}^{n} np_t \middle| \sum_{t=1}^{n} p_t \boldsymbol{g}(X_t, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}, p_t \geq 0, \sum_{t=1}^{n} p_t = 1 \right\}.$$

で定義され，以下の経験対数尤度関数

$$l_n(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{t=1}^{n} \log\{1 + \boldsymbol{\tau}' \boldsymbol{g}(X_t; \boldsymbol{\theta})\}.$$

を最大にするような $\boldsymbol{\theta}$ と同等である．ここに $\boldsymbol{\tau}$ は Lagrange multiplier であり，$\boldsymbol{\theta}$ の関数 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$ となる．

3 Main Result

適当な条件のもと，以下の漸近正規性を得る．

Theorem 1

$$\sqrt{n} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_n \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N_{2+q+m} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_m & \Sigma_m \\ \Sigma_m' & \Gamma_m \end{pmatrix} \right]$$

ここに

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\tau}}_n &= \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \\
\Omega_m &= [B'W^{-1}B]^{-1}B'W^{-1}VW^{-1}B[B'W^{-1}B]^{-1} \\
\Gamma_m &= \big(W^{-1}B[B'W^{-1}B]^{-1}B' - I_m\big)W^{-1}VW^{-1}\big(W^{-1}B[B'W^{-1}B]^{-1}B' - I_m\big) \\
\Sigma_m &= [B'W^{-1}B]^{-1}B'W^{-1}VW^{-1}(I_m - B[B'W^{-1}B]^{-1}B'W^{-1}).
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
\Phi_{\boldsymbol{\theta}} &= -\Big(\phi_{\boldsymbol{\theta}}(t_1), \ldots, \phi_{\boldsymbol{\theta}}(t_m)\Big)', \qquad B = \left(\frac{\partial \Phi_{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \boldsymbol{\theta}_0}\right), \\
W_{ab} &= \frac{1}{2}\Big(e^{-\gamma|\eta_a+\eta_b|^\alpha \sum_{j=0}^{\infty}|\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha} + e^{-\gamma|\eta_a-\eta_b|^\alpha \sum_{j=0}^{\infty}|\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha}\Big) - e^{-\gamma(|\eta_a|^\alpha+|\eta_b|^\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha}, \\
V_{ab} &= W_{ab} \\
&\quad + \sum_{h=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{2}\Big(e^{-\gamma\sum_{j=0}^{\infty}|\eta_a\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}+\eta_b\psi_{j-h,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha} + e^{-\gamma\sum_{j=0}^{\infty}|\eta_a\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}-\eta_b\psi_{j-h,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha}\Big) - e^{-\gamma(|\eta_a|^\alpha+|\eta_b|^\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(e^{-\gamma\sum_{j=0}^{\infty}|\eta_a\psi_{j-h,\boldsymbol{\xi}}+\eta_b\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha} + e^{-\gamma\sum_{j=0}^{\infty}|\eta_a\psi_{j-h,\boldsymbol{\xi}}-\eta_b\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha}\Big) - e^{-\gamma(|\eta_a|^\alpha+|\eta_b|^\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_{j,\boldsymbol{\xi}}|^\alpha}\Bigg],
\end{aligned}$$

である．

また，さらに経験尤度推定量の漸近分散が線形過程の従属性 (dynamics) の影響をどのように受けるかを，Hampel の influence function を用いて理論的，数値的に調べた．

Comparison of Whittle type portmanteau tests

TOMOYUKI AMANO

Abstract

For an ARMA adequacy test, Box and Pierce (1970) proposed a portmanteau test T_{BP}. However, because the accuracy of T_{BP} by χ^2-approximation is not good, various modification of T_{BP} have been introduced by many authors. Taniguchi and Amano (2008) proposed an important portmanteau test T_{WLR} of natural Whittle type which is always asymptotically χ^2 distributed under the null hypothesis that ARMA model is adequate. This paper compares T_{WLR} with another famous portmanteau tests Ljung-Box's T_{LB}, Li-McLeod's T_{LM} and Monti's T_{MN} and proves its accuracy by simulation. Empirical powers of those portmanteau tests are also compared numerically.

1. Introduction

One of the most important stages of building a model in time series is to verify the adequacy of a fitte model. In particular, sample residual autocorrelations are usually used. For ARMA adequacy test, Box and Pierce (1970) proposed a test statistic T_{BP} which is the squared sum of m sample autocorrelations of the estimated residual process of ARMA(p,q). Under the null hypothesis that the ARMA(p,q) model is adequate, it is suggested that T_{BP} is approximately distributed as χ^2_{m-p-q}. However, Davies et al. (1977) claimed that the χ^2_{m-p-q} -approximation is not adequate and Ljung and Box (1978) and Li-McLeod (1981) proposed test statistics T_{LB} and T_{LM} as a modificatio of T_{BP}. Recently Monti (1994) proposed a portmanteau test T_{MN} using the residual partial autocorrelations. Various modifie versions of T_{BP} (see Li (2004)) have been proposed. Under the null hypothesis that ARMA(p,q) is adequate, these test statistics are much closer to chi-square distribution than T_{BP}.

The test statistic T_{BP} and modification of T_{BP} are called the portmanteau test and have been widely used. Taniguchi and Amano (2008) proved that T_{BP} does not converge to χ^2_{m-p-q} distribution for fi ed m and for ARMA adequacy test, proposed a portmanteau test of natural Whittle type T_{WLR} and showed that T_{WLR} is always asymptotically chi-square distributed. This paper compares T_{WLR} with another famous portmanteau test statistics T_{BP}, T_{LB} and T_{MN} and we observe that T_{WLR} behaves well numerically.

REFERENCES

[1] Box, G. E. P. and Pierce, D. A. (1970) Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. J. Amer. Statist. Assoc. 65, 1509-1526.

[2] Davies, N., Triggs, C. M. and Newbold, P. (1977) Significanc levels of the Box-Pierce portmanteau statistic in finit samples. Biometrika 64, 517-522.

[3] Li, W. K. (2004) *Diagnostic checks in Time Series*. New York: Chapman & Hall/CRC.

[4] Li, W. K. and McLeod, A. I. (1981) Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 43, 231-239.

[5] Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978) On a measure of lack of fi in time series models. Biometrika 65, 297-303.

[6] Monti, A. C. (1994) A proposal for a residual autocorrelation test in linear models. Biometrika. 81, 776-780.

[7] Taniguchi, M. and Amano, T. (2008) Systematic approach for portmanteau tests in view of Whittle likelihood ratio. http:// www. math. waseda. ac. jp/ taniguchi/ with-outproofPortmanteauTests. pdf

Tomoyuki AMANO
Department of Applied Mathematics
School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University
3-4-1 Okubo Shinjuku-ku
Tokyo 169-8555
Japan
E-mail: tomtochami@aoni.waseda.jp

Statistical Analysis on Complex Multivariate Spaces and Manifolds

香川大学名誉教授　　筑瀬　靖子

We are concerned with statistical analysis on complex Euclidean spaces and complex manifolds consisting of vectors or matrices with complex elements.

Various theoretical aspects have been studied in the complex multivariate analysis; see e.g., Andersen et al [1] and Khatri[6]. They are useful in the analysis of the Fourier-transformed variates of matrix-valued time series observations and in the analysis of random matrices. The complex normal and the complex Wishart matrices are used for working statistical signal properties in communication systems and seismic applications.

The paper by Atiyah and Todd [2] is known as a classical paper on complex Stiefel manifolds. The complex Stiefel manifolds and the related invariant measures appear in the decompositions of some complex matrices.The complex Stiefel manifold is used as the coding space to express the transmit signals for space-time coding schemes in the signal processing of channel communication systems. Note that the complex Grassmann manifold, consisting of the vector spaces spanned by the columns of matrices in the complex Stiefel manifold, as a coset of the Stiefel manifold, is also used as a coding space.

To investigate distribution theory on these spaces and manifolds, we need to develop the theory of zonal polynomials, hypergeometric functions and orthogonal polynomials with Hermitian matrix arguments. Zonal polynomials with Hermitian matrix argument are defined (see James[5]) and various mathematical properties are investigated; Laplace transforms, integrals over the unitary group, complete and incomplete integrals of Gamma-type and Beta-type. We can generalize the discussion of the zonal polynomials with one Hermitian matrix argument to that of the invariant polynomials with multiple Hermitian matrix arguments.

The hypergeometric functions with Hermitian matrix argument are defined by the complex Laplace transforms and we investigate the related properties; series representations, integral representations, Kummer relations and so on. The discussion of the complex Hermite and Laguerre polynomials is also useful; see Chikuse [3].

These polynomials can be used to express the distributions of matrix variates and of latent roots. Some applications are presented.

A brief discussion of the distributions defined on the complex Stiefel manifold may be given (see Chikuse [4]).

References

[**1**] Andersen, H.H., Hojbjerre, M., Sorensen, D., Eriksen, P.S. (1995). *Linear and Graphical Models: for the Multivariate Complex Normal Distribution.* Springer, New York.

[**2**] Atiyah, M.F., Todd, J.A. (1960). On complex Stiefel manifolds. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **56**, 342-353.

[**3**] Chikuse, Y. (2004). Hermite and Laguerre polynomials with complex matrix arguments. *Linear Algebra Appl.* **388**, 91-105.

[**4**] Chikuse, Y. (Unpublished note). Orientational distributions on complex Stiefel manifolds.

[**5**] James, A.T. (1964). Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples. *Ann. Math. Statist.* **35**, 475-501.

[**6**] Khatri, C.G. (1965). Classical statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. *Ann. Math. Statist.* **36**, 98-114.

An extension of the non-central negative binomial distribution

清水 邦夫[a], 王 生発 (S.H. Ong)[b]

a) 慶應義塾大学 理工学部 数理科学科・統計数理研究所（客員）
b) マラヤ大学 理学部 数理科学研究系

Erdélyi et al. (1953, p. 283, Eq. (3)) により，つぎの公式が知られている：

$$ {}_1F_1(a;c;\Lambda z) = \Lambda^{-a} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a)_x}{x!} (1-\Lambda^{-1})^x {}_1F_1(a+x;c;z), \quad \mathrm{Re}\,\Lambda > 1/2. \tag{1} $$

ここで，$(a)_x$ は Pochhammer の記号，${}_1F_1$ は合流型超幾何関数を表す．いま，式 (1) で $a = k\ (>0)$, $\Lambda^{-1} = p\ (0 < p = 1-q < 1)$, $z = \lambda p\ (\lambda \geq 0)$, $c > 0$ とおくと，確率関数

$$ p_x = \frac{(k)_x}{x!} p^k q^x \frac{{}_1F_1(k+x;c;\lambda p)}{{}_1F_1(k;c;\lambda)}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{2} $$

を得る．確率関数 (2) を持つ分布は，$\lambda = 0$ のとき負の二項分布に帰着し，また，$k = c$ のとき，Kummer 変換 ${}_1F_1(\alpha;\beta;x) = e^x {}_1F_1(\beta-\alpha;\beta;-x)$ から，Ong and Lee (1979) の非心負の二項分布に帰着することが分る．

確率関数 (2) の分布に関する諸性質について調べる．確率変数 X は確率関数 (2) を持つものとする．式 (1) で $a = k\ (>0)$, $(0 <)\ \Lambda^{-1} = 1-qt\ (< 2,\ 0 < q = 1-p < 1)$, $z = \lambda p\ (\lambda \geq 0)$, $c > 0$ とおくと，

$$ {}_1F_1\left(k;c;\frac{\lambda p}{1-qt}\right) = (1-qt)^k \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(k)_x}{x!} (qt)^x {}_1F_1(k+x;c;\lambda p) $$

となるので，X の確率母関数 (pgf) は

$$ E(t^X) = \left(\frac{p}{1-qt}\right)^k \frac{{}_1F_1(k;c;\lambda p/(1-qt))}{{}_1F_1(k;c;\lambda)}, \quad -1 < qt < 1 \tag{3} $$

となる．r 次の下降階乗モーメントは

$$ E(X_{[r]}) = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = \left(\frac{q}{p}\right)^r (k)_r \frac{{}_1F_1(k+r;c;\lambda)}{{}_1F_1(k;c;\lambda)} $$

で与えられる．

提案分布の生成法には，つぎのものが考えられる．

第一に，確率変数 X_1 は pgf $E(t^{X_1}) = (p/(1-qt))^k$, $1-qt > 0$ の負の二項分布に従うとし，確率変数 X_2 は X_1 と独立で，pgf

$$ E(t^{X_2}) = \frac{{}_1F_1(k;c;\lambda p/(1-qt))}{{}_1F_1(k;c;\lambda)} \tag{4} $$

の分布に従うとする．そのとき，和 X_1+X_2 は pgf (3) を持つ．この生成から，$E(X) \geq E(X_1)$ および $\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}(X_1)$ となることは明らかである．

第二に，負の二項 pgf $H(t) = (p/(1-qt))^z$ を考える．ここで，z を確率変数とし，$Z = U + k$ とする．U が pgf

$$E(t^U) = \frac{{}_1F_1(k; c; t\lambda)}{{}_1F_1(k; c; \lambda)} \tag{5}$$

の合流型超幾何分布に分布するとすれば， $H(t)$ の無条件 pgf は pgf (3) に一致する．

pgf (4) の分布は複合（もしくは一般化）分布に関係している．実際，一般に確率変数 K は pgf $G_1(t)$ の分布 F_K に従うとしてみる．また，確率変数列 $Z_1, Z_2, \ldots$ は互いに独立で同一の pgf $G_2(t)$ を持つ分布 F_Z に従うとし，確率変数 K は $Z_1, Z_2, \ldots$ と独立とする．そのとき，確率変数 $S = Z_1 + \cdots + Z_K$（$K = 0$ のときは $S = 0$ と解釈）は pgf $G_1(G_2(t))$ を持ち，S の分布は複合分布もしくは F_K 分布の F_Z 分布による一般化と呼ばれる．$G_1(t)$ が式 (5) で与えられ，$G_2(t) = p/(1-qt)$ のとき，$G_1(G_2(t))$ は式 (4) の pgf となる．これは，合流型超幾何分布の幾何分布による一般化を表す．$k = c$ ならば，式 (5) は平均 λ のポアソン分布の pgf $E(t^U) = \exp[\lambda(t-1)]$ に帰着する．この場合，pgf (4) の分布はポアソン分布の幾何分布による一般化分布となる．

pgf (3) の分布は，$Z_1, Z_2, \ldots$ を互いに独立で同一に pgf $p/(1-qt)$ の幾何分布に従う確率変数列，K を $Z_1, Z_2, \ldots$ と独立で pgf

$$E(t^K) = \frac{t^k {}_1F_1(k; c; t\lambda)}{{}_1F_1(k; c; \lambda)}.$$

を持つシフトした合流型超幾何分布に従う確率変数とするときの複合確率変数 $S = Z_1 + \cdots + Z_K$ の分布として得られる．

変動指数 $\mathrm{ID}(X) = \mathrm{Var}(X)/E(X)$ は r 次下降階乗モーメントの式から求められるが，ID の値が 1 より小（過小変動）なのか 1 より大（過大変動）なのかは明らかではない．しかしながら，上の複合分布の生成法から pgf (3) の分布は過大変動であることが分る．

本報告は Ong and Shimizu (to appear) 論文の一部である．

参考文献

[1] Erdélyi, A., et al., 1953. Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, New York.

[2] Ong, S.H., Lee, P.A., 1979. The non-central negative binomial distribution. Biometrical Journal 21, 611–628.

[3] Ong, S.H., Shimizu, K., to appear. A discrete distribution arising as a solution of a linear difference equation: Extension of the non-central negative binomial distribution, Communications in Statistics – Theory and Methods.

A family of flat-topped distributions on the circle

阿部 俊弘[1], 清水 邦夫[2]
[1] 慶應義塾大学大学院 理工学研究科
[2] 慶應義塾大学 理工学部

Papakonstantinou (1979) はパラメータ k $(-1 \le k \le 1)$ と ν $(-1 < \nu < 1)$ の, 確率密度関数 (pdf)

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi\{1 - k\,J_1(\nu)\}}\{1 + k\,\cos(\theta + \nu\sin\theta)\},\ \ -\pi \le \theta < \pi \tag{1}$$

を持つ円周上の分布を提案した. ここで, $J_1(\nu)$ は 1 次の第 1 種 Bessel 関数を表す. この分布は, cardioid 分布 $(\nu = 0)$ を含む. また, Batschelet (1981) により, パラメータ κ $(\kappa \ge 0)$ と ν $(-1 < \nu < 1)$ の, pdf

$$f(\theta) \propto \exp\{\kappa\cos(\theta + \nu\sin\theta)\}, \quad -\pi \le \theta < \pi \tag{2}$$

を持つ分布が提案されている. この分布は, $\nu = 0$ のとき, von Mises 分布に帰着する. 彼らにより提案された分布は, Batschelet (1981) により, flat-topped と sharply peaked の性質を持つ分布と呼ばれている.

本報告では, 上で述べた, Papakonstantinou の分布の pdf (1) や Batschelet の分布の pdf (2) が $\cos(\theta + \nu\sin\theta)$ で表されていることから, 彼らの分布の一般化として, $\cos\theta$ の関数である円周上の分布の pdf $f_1(\cos\theta)$ $(\theta \in [-\pi, \pi))$ を用いて, $-\infty < \nu < \infty$ に対して次の pdf $f_\nu(\theta)$ を持つ円周上の分布を提案する:

$$f_\nu(\theta) \propto f_1(\cos(\theta + \nu\sin\theta)),\ \ -\pi \le \theta < \pi. \tag{3}$$

特に $\nu = 0$ ならば, $f_0(\theta) = f_1(\cos\theta)$ となるので, (3) は $f_\nu(\theta) \propto f_0(\theta + \nu\sin\theta)$ と書くこともできる. このとき, pdf (3) の分布が Papakonstantinou と Batschelet の分布を含むことは明らかである. また, 位置パラメータ μ $(-\pi \le \mu < \pi)$ を用いて, $\theta \mapsto \theta - \mu$ とすれば, 平均方向が μ となる分布が定義できる.

pdf (3) を持つ分布について, 次の 2 つの命題が成立する:

Proposition 1.

$f_0(\theta)(= f_1(\cos\theta))$ が $\theta \ne -\pi, 0$ に対して, $f_0'(\theta) \ne 0$ を満たす単峰な分布の pdf とする. このとき, pdf (3) を持つ分布は ν に関する制約 $|\nu| \le 1$ があるとき, またそのときに限って単峰である. また, $|\nu| > 1$ のときは各 $m = 1, 2, \ldots$ に対して, ν が $m\pi < h(\nu) \le (m+1)\pi$ を満たす, または, 各 $m = -1, -2, \ldots$ に対して, ν が $m\pi \le h(\nu) < (m+1)\pi$ を満たすならば, $(2|m| + 1)$mode となる. ここで, $h(\nu) = \cos^{-1}(-1/\nu) + \nu\sqrt{1 - 1/\nu^2}$ である.

Proposition 2.
$-1 \le \nu_1 < \nu_2 \le 1$ ならば, $f_{\nu_1}(\mu) < f_{\nu_2}(\mu)$, $f_{\nu_1}(\mu \pm \pi) < f_{\nu_2}(\mu \pm \pi)$ であり, また $\theta = 0$ における曲率

$$\frac{f_\nu''(0)}{[1 + \{f_\nu'(0)\}^2]^{3/2}} = f_\nu''(0)$$

を考えると, $f_{\nu_1}''(0) > f_{\nu_2}''(0)$ が成立する.

Proposition 1 から, Papakonstantinou 分布や Batschelet 分布よりも広い範囲のパラメータ ν に対する modality がわかり, Proposition 2 より, Papakonstantinou の分布や Batschelet の分布の flat-topped と sharply peaked の性質が pdf のパラメータ ν の順序関係によって説明される.

一方, cardioid 分布や von Mises 分布を特別な場合として含む Jones–Pewsey 分布が Jones and Pewsey (2005) により提案されている.

$$f_0(\theta) \propto \{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos\theta\}^{1/\psi}, \quad -\pi \le \theta < \pi. \tag{4}$$

ここで, $\kappa \ge 0$ かつ $-\infty < \psi < \infty$ (連続性より, $\psi = 0$) である. Jones–Pewsey 分布は κ を大きくとれば, 分布の頂点付近が急な分布になるが, Papakonstantinou 分布や Batschelet 分布のように頂点付近が平らになることはない. そこで, (3) において, $f_1(\cos\theta)$ を pdf (4) とした次の Jones–Pewsey 型の対称分布を提案する.

$$f(\theta) \propto \{1 + \tanh(\kappa\psi)\cos(\theta + \nu\sin\theta)\}^{1/\psi}, \quad -\pi \le \theta < \pi. \tag{5}$$

ここで, $\kappa \ge 0$, $-\infty < \psi < \infty$ かつ $-\infty < \nu < \infty$ である. pdf (5) を持つこの分布族は $\nu = 0$ のときに Jones–Pewsey 分布 (4) に帰着する. pdf (5) を持つ分布に含まれる他の特別な場合は $\kappa = 0$, または κ は有限で $\psi \to \pm\infty$ のどちらかのとき, 円周一様分布, $\psi = 1$ のとき, $k = \tanh(\kappa)$ として, Papakonstantinou 分布, $\psi \to 0$ のとき, $\tanh(x) = x - x^3/3 + \cdots$ $(|x| < \pi/2)$ と $(1+x)^{1/x} \to e$ $(x \to 0)$ から Batschelet 分布に帰着する. よって, Jones–Pewsey 分布が cardioid 分布と von Mises 分布を連結しているという事実と同様に, pdf (5) を持つ Jones–Pewsey 型の提案分布は Papakonstantinou 分布 $(\psi = 1)$ と Batschelet 分布 $(\psi \to 0)$ を連結している.

(5) の正規化定数はよく知られた特殊関数の形で書くことはできないが, *Mathematica* などの数学的パッケージのコマンドにある *NMaximize* 関数を用いれば, 尤度を最大化する各パラメータの数値解を見つけることはそれほど困難ではない. 最後に, パラメータ推定の例として, Kamthi 川の下流で観測された斜交層理データおよび Jones–Pewsey 型の提案分布から棄却法により生成したデータについて分布の当てはめを行う.

参考文献

[1] Batschelet, E. (1981). *Circular Statistics in Biology*, Academic Press, London.

[2] Jones, M. C. and Pewsey, A. (2005). A family of symmetric distributions on the circle, *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1422–1428.

[3] Papakonstantinou, V. (1979). Beiträge zur zirkulären Statistik, Ph.D. dissertation, University of Zurich, Switzerland.

LINEX 損失関数の下での多変量正規分布における 線型推定量の許容性と非許容性について

達川　真史 (大阪府立大学工学研究科)
田中　秀和 (大阪府立大学工学研究科)

1　はじめに

統計的推測理論において適当な損失関数の下でリスクを評価し, 提起された推定量が許容的または非許容的かを決定する問題は重要である. 損失関数としては解析的にも取り扱いやすいという理由から通常, 2 乗誤差損失を扱うことが多い. Cohen [1] は多変量正規分布の平均の線型結合の推定問題を 2 乗誤差損失の下で考え, 線型推定量が許容的となるための必要十分条件を与えた. しかし, 2 乗誤差損失とは異なる損失関数の場合には解析的にも取り扱い難い面もあり, あまり論じられてこなかったようである. Varian [4], Zellner [5] は 2 乗誤差損失を拡張した非対称な損失関数である LINEX 損失関数を提案した. これは, 被推定関数 $g(\theta)$ の推定量 δ に対して,

$$L(\theta,\delta) = b[\exp\{a(\delta - g(\theta))\} - a(\delta - g(\theta)) - 1] \tag{1.1}$$

と定義される. ただし, $a \neq 0$, $b > 0$ である. LINEX 損失の下での推定量の許容性に関する研究としては, ある特定の分布において線型推定量が許容的であるかどうかという結果がほとんどである. 例えば, Rojo [2] は 1 変量正規分布の平均の推定において, 線型推定量が許容的となるための必要十分条件について論じている. 最近, Tanaka [3] は LINEX 損失の下で一般化 Bayes 推定量が許容的となるための十分条件を導出した. 本講演では, Cohen [1] 及び Rojo [2] の結果を一般化して, 以下のような問題を取り扱う:

X を p 次元正規分布 $N_p(\theta,\Lambda)$ に従う確率ベクトルとする. ただし, $\theta \in \mathbb{R}^p$ は未知であり, Λ は既知の正値対称行列である. このとき, 与えられた既知ベクトル $\varphi \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ に対して, θ の関数 $g(\theta) = \varphi'\theta$ の推定問題を LINEX 損失関数 (1.1) の下で考え, 線型推定量

$$\delta(\gamma,k) := \gamma' X + k$$

が許容的となるための γ 及び k に関する必要十分条件について考える.

2　主結果

まず, $\Lambda = I$ のときについて考える.

定理 1 確率変数 X が $N_p(\theta, I)$ に従うとき, $\varphi'\theta$ の線型推定量 $\delta(\gamma,k) = \gamma' X + k$ が LINEX 損失の下で許容的となるための γ, k の必要十分条件は以下の条件 (i) または (ii) を満足することである:

(i) $\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)'\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \leq \frac{1}{4}\varphi'\varphi$ かつ $\gamma \neq \varphi$.

(ii) $\gamma = \varphi$ かつ $k = -\frac{a}{2}\varphi'\varphi$.

非許容的な結果に関しては $\delta(\gamma, k)$ を優越する推定量を構成することによって示すことができる．許容的な結果に関しては, γ, k が $(\gamma - \varphi/2)'(\gamma - \varphi/2) < \varphi'\varphi/4$ を満足すれば, $\delta(\gamma, k)$ がある事前分布に関する Bayes 推定量で表せることから示される．また, $(\gamma - \varphi/2)'(\gamma - \varphi/2) = \varphi'\varphi/4$ を満足するときは, Tanaka [3] での手法を用いて得られる次の補題によって許容性を示すことができる．

補題 1 確率ベクトル $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)'$ は平均ベクトル $(\xi, \mathbf{0})'$, 共分散行列 I の正規分布に従うものとする．このとき, 未知母数 $\xi \in \mathbb{R}$ の推定量として $Y_1 - a/2$ を考える．もし

$$R(\xi, \delta(Y)) \leq R(\xi, Y_1 - \frac{a}{2})$$

が任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して成り立てば, $a.a.\, y \in \mathbb{R}^p$ に対して $\delta(y) = y_1 - a/2$ が成り立つ．

定理 1 において, 適当な変換を施すことによって, 一般の正値対称行列 Λ に対して, 以下の結果を得る．

定理 2 確率変数 X が $N_p(\theta, \Lambda)$ に従うとき, $\varphi'\theta$ の線型推定量 $\delta(\gamma, k) = \gamma' X + k$ が LINEX 損失の下で許容的となるための γ, k の必要十分条件は, 以下の条件 (i) または (ii) を満足することである:

(i) $\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)'\Lambda\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \leq \frac{1}{4}\varphi'\Lambda\varphi$ かつ $\gamma \neq \varphi$.

(ii) $\gamma = \varphi$ かつ $k = -\frac{a}{2}\varphi'\Lambda\varphi$.

定理 2 において $p = \varphi = \Lambda = 1$ とすることにより Rojo [2] の結果が得られる．また, $a = 0$ とすることにより Cohen [1] の結果が得られる．これは LINEX 損失関数が 2 乗誤差損失関数の拡張であることを考慮すれば妥当な結果であると思われる．

参考文献

[1] Cohen, A. Estimates of linear combinations of the parameters in the mean vector of a multivariate distribution. *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 78–87.

[2] Rojo, J. On the admissibility of $c\overline{X} + d$ with respect to the LINEX loss function. *Comm. Statist. Theory Methods*, **16** (1987), 3745–3748.

[3] Tanaka, H. Sufficient conditions for the admissibility under LINEX loss function in regular case. Accepted for publication in *Comm. Statist. Theory Methods.*

[4] Varian, H. R. A Bayesian approach to real estate assessment. *Studies in Bayesian econometrics and statistics*, In honor of Leonard J. Savage. Eds. Fienberg, S. E. and Zellner, A. North-Holland Amsterdam (1975), 195–208.

[5] Zellner, A. Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81** (1986), 446–451.

非正規多変量母集団の平均推測の高次漸近論：最近の発展を中心に

柿沢佳秀 (北海道大学大学院経済学研究科)

1. はじめに

本報告では, 報告者が最近関心をもった題材に限定した漸近展開の文献をいくつかのカテゴリーに分け, それらをほぼ時系列順に概観し, 特に報告者の最近の成果を中心にサーベイ報告をした. 近年, 高次元多変量解析が盛んに論じられているが, 以下ではデータの次元数 p を任意に固定して標本数に関する漸近論を扱う.

2. 漸近展開 (B-G 理論) について

漸近展開は近年, 従属性のある確率過程 (正規 ARMA(Taniguchi; 1991, Higher Order Asymptotic Theory for Time Series Analysis), 離散時間定常時系列 (Götze and Hipp; 1983, ZW; 1994, AS), 連続時間確率過程 (Kusuoka and Yoshida; 2000, PTRF)) などの基礎理論を経由し適用範囲が拡がってきたが, その骨格は独立和の漸近展開の名著 Bhattacharya and Rao(1976; Normal Approximation and Asymptotic Expansions) に見られた. これらの大枠は以下のようである. $\mathrm{N}_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$ へ法則収束するようなある標準化された m 次元の基本量 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_N$ について, 平滑化補題から

$$\Big|E[H(\mathbf{s})] - \int_{\mathrm{R}^m} H(\mathbf{u})\phi_{\mathrm{I}_m}(\mathbf{u})[1 + \sum_{\ell=1}^{k} N^{-1/2}P_\ell(\mathbf{u})]\,d\mathbf{u}\Big| = \mathrm{o}(N^{-k/2}) + \mathrm{const}\int_{\mathrm{R}^m} \omega_H\{B(\mathbf{u} : \epsilon_N)\}\phi_{\mathrm{I}_m}(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}$$

の評価を $\mathbf{s}$ の確率測度と Edgeworth 展開 $\phi_{\mathrm{I}_m}(\mathbf{u})[1+\sum_{\ell=1}^{k} N^{-1/2}P_\ell(\mathbf{u})]$ に対応する符号付き測度の差による部分と $H(\cdot) = H_N(\cdot)$ の連続度に依存する部分にわけておこなう. 特に, 前者ではデータを発生するモデル毎の議論を要する (独立和のとき Cramér 条件を仮定しなければならない). このとき, もし $\dot{m}(\le m)$ 次元の推定量・統計量を標準化して $(s_1, \ldots, s_{\dot{m}})' + \sum_{\ell=1}^{k} N^{-\ell/2}\mathbf{Q}_\ell(\mathbf{s}) + N^{-(k+1)/2}\boldsymbol{\xi}_N$ (ここに, $\mathbf{Q}_\ell(\cdot)$ は $\dot{m}$ 次元の多項式ベクトル, $P[||\boldsymbol{\xi}_N|| \ge (\log N)^\beta] = \mathrm{o}(N^{-k/2})$ なる正数 β が存在する) の形式に確率展開できれば, $\mathbf{s}$ に関する多項式統計量 $(s_1, \ldots, s_{\dot{m}})' + \sum_{\ell=1}^{k} N^{-\ell/2}\mathbf{Q}_\ell(\mathbf{s})$ の漸近展開を求めればよい (Chibisov(1972; TPA)). 特に, 基本量 $\mathbf{s}$ の Edgeworth 展開に関する積分を変数変換 $\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{u}} \\ \widetilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \mathbf{u} + \sum_{\ell=1}^{k} N^{-\ell/2}\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_\ell(\mathbf{u}) \\ \mathbf{0}_{m-\dot{m}} \end{pmatrix}$ で置換積分する方針は Pfanzagl(1973), Michel(1975; JMVA) による (標準化された) MLE の分布の漸近展開で見られたが, Bhattacharya and Ghosh(1978; AS) を引用する慣例がある. 同様に, 統計量が $T = \sum_{j'=1}^{\dot{m}} s_{j'}^2 + \sum_{\ell=1}^{2} N^{-\ell/2}q_\ell(\mathbf{s}) + N^{-3/2}\xi_N$ (ここに, $q_\ell(\mathbf{u}) = 2\sum_{j,j'=1}^{\dot{m}} u_j u_{j'}\Pi_\ell^{j,j'}(\mathbf{u})$ は多項式, $P[|\xi_N| \ge (\log N)^\beta] = \mathrm{o}(N^{-1})$ なる正数 β が存在する; Chibisov(1972; TPA), Magdalinos(1992; ET)) の形式に確率展開できれば, Chandra and Ghosh(1979,1980; Sankhyā) を引用する慣例もあるが, $T = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{s})'\boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}) + N^{-3/2}\widetilde{\xi}_N$ (ここに, $P[|\widetilde{\xi}_N| \ge (\log N)^{\widetilde{\beta}}] = \mathrm{o}(N^{-1})$ なる正数 $\widetilde{\beta}$ が存在する) のような平方版へ書き直して $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}) = (\rho_1(\mathbf{s}), \ldots, \rho_{\dot{m}}(\mathbf{s}))'$,

$$\rho_j(\mathbf{s}) = s_j + N^{-1/2}\sum_{j'=1}^{\dot{m}} s_{j'}\Pi_1^{j,j'}(\mathbf{s}) + N^{-1}\Big[\sum_{j'=1}^{\dot{m}} u_{j'}\Pi_2^{j,j'}(\mathbf{s}) - \frac{1}{2}\sum_{j',j''=1}^{\dot{m}} s_{j'}\Pi_1^{j'',j'}(\mathbf{s})\Pi_1^{j'',j}(\mathbf{s})\Big]$$

の漸近展開を議論してもよい. なお, Amari(1985; Differential-Geometrical Methods in Statistics), McCullagh(1987; Tensor Methods in Statistics), Barndorff-Nielsen and Cox(1989; Asymptotic Techniques for Use in Statistics, 1994; Inference and Asymptotics) などの技術も併用すればより見通しがよい.

3. 微分作用素法 (Welch-James 法のアイディア) について

Welch(1947; Biometrika)-James(1954; Biometrika) 法は 1950 年代から 1970 年代にしばしば利用され, 典型例は正規多変量線形回帰モデルにおける係数行列の線形仮説の LH 統計量の非心分布

漸近展開 (Siotani(1956; AISM, 1971; AMS), Ito(1956,1960; AMS)) である. 等分散な多変量正規母集団の２群判別で, Okamoto(1963; AMS) は W-判別方式の誤判別確率の漸近展開導出のために標本平均ベクトルと標本分散行列の関数の期待値を微分作用素で公式化しており, それは Memon and Okamoto(1971; JMVA) により Z-判別方式に対しても適用された. また, 分散行列の構造に関する諸統計量で標本分散行列の関数の期待値の公式が杉浦・長尾・藤越による漸近展開導出の際に使用された. このような Welch-James 法を起源とするアプローチの背後には正規標本論での Cochran の定理があり, 独立な正規行列と Wishart 行列の関数, あるいは, 複数の独立な Wishart 行列の関数として記述される場合には, 条件付き期待値を経由して Wishart 行列に関する期待値計算へ帰着させることができた. なお, これらの 1970 年代までの多変量解析の膨大な成果は, 漸近展開の数学的正当化がなされた 1970 年代以前の仕事であったが, Chandra and Ghosh(1979,1980; Sankhyā) はカイ２乗型の漸近展開の応用例として多変量解析の先行研究を引用しており, 従って微分作用素法による特性関数を展開するアプローチは「B-G 理論＋特性関数の一意性」の組み合わせから正当化できることに注意する.

4. 非正規多変量線形回帰モデルの線形仮説の検定の漸近展開の進展

３節の Welch-James 法は 1970 年代後半以降に文献で使用されることは少なかった. 漸近展開の研究経過とその時代背景を振り返ることから, その理由として (i) 1970 年代で多変量解析の分布論 (特に漸近展開) が蓄積され, B-G 理論の整備以後, 対象が計量経済学モデル (典型的に同時方程式モデル) や定常時系列へとシフトしたが, それらでは Wishart 分布が陽に登場することは稀で, Welch-James 法の相性が悪かった (ii) 数理統計学全般で 1970 年代から 1980 年代の推定・検定理論において高次漸近有効性が議論されたが, 特に推定論では確率展開をしてキュムラント計算を行うことが多かった; なお, 形式的な漸近展開が Bhattacharya and Ghosh(1978; AS) で正当化された (iii) Efron(1979; AS) のブートストラップ法が近似手法として脚光を浴び, 漸近 pivotal な推定量・統計量の漸近展開の存在性がその高次精度を保証する役割を担ったことなどをあげることができる. また, 1990 年代以降になって国内の研究者を中心にして多変量母集団の平均推測に関わる諸統計量の分布の漸近展開が非正規・帰無仮説で議論された. これは 1990 年代の研究の１つのキーワード「非正規・非線形」によるものであるが, 近年は「高次元多変量解析」という２１世紀のチャレンジ話題にシフトしてきている.

報告者は, 正規母集団で成立した Cochran の定理 (正規行列と Wishart 行列の独立性) に基づいた条件付きアプローチを外すことから「非正規母集団における微分作用素法」を再考察し, １標本・２標本の Hotelling の T^2 統計量と１元配置モデルの平均ベクトル同等性の検定の LR,LH,BNP 統計量, 及び, James 統計量 (２標本の場合の BF 統計量も含む) の局所対立仮説の下での検出力の漸近展開導出に成功した (詳細は Kakizawa and Iwashita(2008a; JSPI, 2008b; JMVA), Kakizawa(2007; JJSS)). さらに, 微分作用素法は多変量線形回帰モデルにおける係数行列の線形仮説の LR,LH,BNP 統計量に付随する公式へと拡張され, それが成長曲線モデルにおける係数行列の一般化線形仮説の統計量のクラスへも適用されている (Kakizawa (To appear in JMVA)).

本報告の後半では, 非正規多変量線形回帰モデルにおける係数行列の線形仮説の LR,LH,BNP 検定 (Cornish-Fisher 型展開でサイズ調整した CF-検定と Bartlett 型補正をした B-検定) の局所検出力比較を非心行列のことばで説明し, その高次漸近理論を数値実験からも検討した. 特に, B-検定について, 変換多項式 $B_{\#}(x)$ の非単調性が検出力損失の原因となる (Cordeiro-Ferrari(1991; Biometrika) による Bartlett 型統計量は非単調性のために帰無仮説から離れるほど負になる傾向が強い) という数値実験結果を報告し, 統計量の大小関係 $T_{LH} \geq T_{LR} \geq T_{BNP}$ から数値的には, $B_{LH}(T_{LH})$ の検出力は酷く低く, $B_{LR}(T_{LR})$ の検出力も低い傾向が見られるため, 検出力回復の策として単調な Bartlett 型補正 (Kakizawa(1996; Biometrika)) の重要性を指摘した.

ヘッジファンドリターンデータの自己回帰性と平均分散などの統計量との関連性について

一橋大学大学院国際企業戦略研究科　三浦良造

ヘッジファンドリターンの自己回帰性と、ヘッジファンドリターンの特性を表す統計量との関連をデータの上で調べた結果を報告した。

ヘッジファンドリターンの分析結果を報告する前に、本報告の内容を位置付けるために、金融工学で用いられるファクターモデルについて、また、デリバティブ価格理論、信用リスク計測、証券化などどのような理論がこの35年間に発展したかについて、さらに、これらの理論が実務で使われる場では、どのような性質の業務が、どのような人々により行われているかについて、簡潔に説明した。そのうえで、1990年ごろから急速な発展を遂げた時系列モデルの理論が、ファクターモデルに適用されるべき時期が来たことを述べ、この研究集会に参加している研究者が、この問題を扱うことを呼びかけた。

報告した研究内容は順に以下のとおりである。

：１．報告された**ヘッジファンドリターンデータの自己回帰性**。

多くのヘッジファンドについて、リターン（月次しかない）は、赤池情報量基準に基づくと、自己回帰性を持つことを示した。てがけたデータは、2006年2月まで生き延びたファンド381ファンドのうち181ファンドが、自己回帰性を持つことを述べた。

：２．つぎに、自己回帰性とヘッジファンド特性を表すために計測される統計量、平均、標準偏差、ねじれ、尖り（別の表現では、1次から4次までのモーメント）とリターン系列の自己回帰性との関連を見るために、自己回帰性を表す統計量が必要である。

ここでは、2006年2月までの60カ月について、個別ヘッジファンドがその月を含む過去12カ月のデータが自己回帰性を示す時、AR(+)と呼び、示さないとき、AR()と呼ぶことにして、60か月のうちAR(+)が発生する頻度の大きさにより、そのファンドの自己回帰性を表すことにした。

：モーメントについて。

以下の4つのモーメントについての計算は、2006年2月までの60カ月分のリターンデータを用いて行った。

すべてのファンドについて、特徴がみられた訳ではないが、Managed Futures, Convertible Arbitrageの2つのカテゴリーについては、AR頻度が多いほどリターンが大きいし、尖りが小さい（Managed Futures)、同様に標本標準偏差が小さいし、ねじれが大きい（Convertible Arbitrage)、などの特徴がみられた。

：３．ヘッジファンドは、市場が好調であるときも、不調であるときも収益を上げると云われる。これは、証券価格の上昇局面を感知して買いを入れる、あるいは下降局面では売りを入れるなどの、市場のタイミングを見計らってトレードを行い、そこから収益を上げるところからもたらされる。それを表現するために、横軸に株価指数の超過収益率をとり、縦軸にヘッジファンドリターンをとり、縦軸の切片の所で折れ曲がる折れ線回帰が使われる。ここでは、その計算を行い、各カテゴリーの属するヘッジファンドについて、この折れ線回帰を行い、さらにオプション性の強さを表す指標として、折れ線回帰直線の傾きの強さ

を表す、横軸が正の部分の回帰直線の傾きと横軸が負の部分の傾きの差の絶対値を使った。回帰の折れ線が開いていればオプション性が弱い、狭く立ち上がっていればオプション性が強いと考える。

：オプション性について。

以下の折れ線回帰についての計算は、2006 年 2 月までの 60 カ月分のリターンデータを用いて行った。

顕著な特徴を示したカテゴリーは、Convertible Arbitrage であり、AR 頻度が高いほど、オプション性が弱くなることがデータから示された。

実務で使われるファクターモデルでは、コールオプションとプットオプションの価格データを使ったファクターを追加することにより、このファクターの係数の大きさをオプション性により説明されるリターン部分とされている。現在利用可能な時系列モデル理論を用いて分析すれば、time-varying な係数が求まるのではないか、あるいは、このようなファクターのうち不要なファクターが見いだされるかも知れないことなどを述べた。

さらに報告者の視点として、ヘッジファンド運用者は、リターンに含まれる自己回帰部分を自覚しているのではないか（すなわち、ヘッジファンドのトレーダーにとっての不確実変量は、自己回帰モデルの残差項だけである）と想定し、リターンの中から自己回帰部分を除去したうえで（しかし、期間中の標本平均は残した、比較の上では、公平である）、上記と同様の回帰を行い、推定された回帰係数が異なること、大多数のファンドカテゴリーにおいて、横軸が負の部分の回帰直線の傾き（負の方向であるが）急勾配であることを示した。

：4．ファンドリターンの AR 頻度が多いこととシャープレシオが高いことと関連するかという視点から、分析を行った。何らかの特徴を見出すための工夫として、同一ファンド内の各月について算出した 60 個のシャープレシオを小さい方から順位をつけた。この順位が高い（つまりシャープレシオが相対的に大きい）月においては、低い月と比べて、他のファンドでも AR 構造が生じていることが多いのではないかという視点を用いた。調べた。

さらに、上記の報告者の視点に基づいて、AR 月のリターンに含まれる自己回帰部分を除去して、シャープレシオの分母である標準偏差（リスク）をもとめるトレーダーのシャープレシオを算出し、これと通常のシャープレシオ（これをここではインベスターズシャープレシオと呼ぶ）の差を求め、それと順位との関連を調べた。

：シャープレシオ SR について、

以下のシャープレシオについての計算は、2006 年 2 月までの 60 カ月分（2006 年 2 月に至る 11 カ月分を含めると 72 カ月分）のリターンデータを用いて 12 カ月のウインドウを一カ月ずつ移動させて行った。

横軸にインベスターズシャープレシオの順位をとり、各ファンドで、その順位にある月のリターンが AR(+)であるファンド数を縦軸にとった。順位が高いほど、わずかながら AR(+)頻度が高いことが見て取れた。

さらに、横軸は同じものとし、縦軸に二つのシャープレシオの差（トレーダーシャープレシオからインベスターシャープレシオを差し引いたもの）をとった。いくつかのカテゴリーについて、順位が高いところでシャープレシオの差が大きことが見てとれた。

Resampling Procedure in estimation of Optimal Portfolios for Time-Varying ARCH Processes

白石 博（早稲田大学 基幹理工学部）

時間 t における m 個の資産のランダムなリターンを $\boldsymbol{X}_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{m,t})'$ とし、定常性を仮定して、その期待値および分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu} = E\{\boldsymbol{X}_t\}$、$\Sigma = Cov(\boldsymbol{X}_t)$ とする。また、ポートフォリオ係数を $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)'$ で表す。このとき、過去、種々の基準から最適ポートフォリオ係数が提案されたが、これらは統一的な形 $g(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ で表される。ここに、$g : \mathbf{R}^{m+m(m+1)/2} \to \mathbf{R}^{m-1}$ なる関数。先行文献では、リターンが i.i.d.（独立同一分布）または定常過程と仮定して、最適ポートフォリオ係数を統計的に推定しているが、経験データを見ると、リターンはしばしば非定常であることが知られている。本報告ではリターンが Dahlhaus and Rao(2006) によって提案された、時変 ARCH(p) 過程であると仮定し、時変パラメータ $\boldsymbol{\theta}_{t/N}$ の擬似最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t/N}$ で構成される最適ポートフォリオ推定量 $g(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t/N})$ の漸近的性質を報告する。

$\{\boldsymbol{X}_{t,N} = (X_{1,t,N}, \ldots, X_{m,t,N})'; t \in \boldsymbol{Z}\}$ が、次で表現される時変パラメータ $\{\boldsymbol{\theta}_{t/N} = (\theta_{1,t/N}, \ldots, \theta_{q,t/N})'; t = 1, \ldots, N\}$ を持つ m 次元 $ARCH(p)$ 過程に従うとする。

$$\boldsymbol{X}_{t,N} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_{t/N}) + D_{t,N}(\boldsymbol{\theta}_{t/N})\boldsymbol{\epsilon}_t$$

ここに $D_{t,N} = diag(h_{1,t,N}^{1/2}, \ldots, h_{m,t,N}^{1/2})$ とし、$\boldsymbol{\epsilon}_t = (\epsilon_{1,t}, \ldots, \epsilon_{m,t})' \sim i.i.d.(\mathbf{0}, I_m)$ とする。また、$\boldsymbol{H}_{t,N} = (h_{1,t,N}, \ldots, h_{m,t,N})'$ が

$$\boldsymbol{H}_{t,N}(\boldsymbol{\theta}_{t/N}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}_{t/N}) + \sum_{j=1}^{p} A_j(\boldsymbol{\theta}_{t/N})\vec{\boldsymbol{Y}}_{t-j}(\boldsymbol{\theta}_{(t-j)/N})$$

を満たすと仮定する。今、各 $u_0 \in (0, 1]$ に対して時変 $ARCH(p)$ 過程に近接している定常 $ARCH(p)$ 過程 $\{\tilde{\boldsymbol{X}}_t(u_0) = (\tilde{X}_{1,t}(u_0), \ldots, \tilde{X}_{m,t}(u_0))'; t \in \boldsymbol{Z}\}$ が存在していると仮定する。

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_t(u_0) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_{u_0}) + \tilde{D}_t(u_0, \boldsymbol{\theta}_{u_0})\boldsymbol{\epsilon}_t$$

ここに、$\tilde{\boldsymbol{H}}_t(u_0) = (\tilde{h}_{1,t}(u_0), \ldots, \tilde{h}_{m,t}(u_0))'$ は、

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_t(u_0, \boldsymbol{\theta}_{u_0}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}_{u_0}) + \sum_{j=1}^{p} A_j(\boldsymbol{\theta}_{u_0})\tilde{\vec{\boldsymbol{Y}}}_{t-j}(u_0, \boldsymbol{\theta}_{u_0})$$

を満たすとする。このとき、適当な正則条件の下、次の性質が成り立つ。

命題 1

$$\vec{\boldsymbol{Y}}_t(\boldsymbol{\theta}_{t/N}) = \tilde{\vec{\boldsymbol{Y}}}_t(u_0, \boldsymbol{\theta}_{u_0}) + O_p\left(\left|\frac{t}{N} - u_0\right| + \frac{1}{N}\right).$$

また、$\boldsymbol{\theta}_{t_0/N}$ の推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t_0/N}$ を次で定義する。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t_0/N} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \mathcal{L}_{t_0,N}(\boldsymbol{\theta})$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t_0,N}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{k=p+1}^{N} \frac{1}{bN} W\left(\frac{t_0-k}{bN}\right) l_{k,N}(\boldsymbol{\theta}) \\
l_{k,N}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2}\left\{\log\det\left(D_{k,N}(\boldsymbol{\theta})^2\right) + (\boldsymbol{X}_{k,N}-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}))' D_{k,N}(\boldsymbol{\theta})^{-2}(\boldsymbol{X}_{k,N}-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}))\right\}
\end{aligned}$$

とする。このとき、適当な正則条件の下、次の結果が得られる。

定理 1　$|u_0 - t_0/N| < 1/N$ かつ $b = O(N^{-1/5})$ ならば、

$$\sqrt{bN}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t_0/N} - \boldsymbol{\theta}_{u_0}) \xrightarrow{d} N(\boldsymbol{B}(u_0), \Sigma(u_0)^{-1}K(u_0)\Sigma(u_0)^{-1})$$

上記推定量を使って、次式より誤差推定量が導かれる。

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t \equiv D_{t,N}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t/N})\{\boldsymbol{X}_{t,N} - \boldsymbol{\mu}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{t/N})\} \quad (t = p+1, \cdots, N).$$

さらに、$G_N(\cdot)$ を各 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_t$ で大きさ $1/N$ をとる経験分布関数とし、G_N から、リサンプリング誤差 $\{\boldsymbol{\epsilon}_t^*, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\}$ を無作為抽出する。これを使って、時点 $u_0 = 1$ におけるリサンプリング収益率 $\tilde{\boldsymbol{X}}_t^*(1)$ が生成される。

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_t^*(1) = \boldsymbol{\mu}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N/N}) + \tilde{D}_t^*(1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N/N})\boldsymbol{\epsilon}_t^*$$

さらに、$\{\tilde{\boldsymbol{X}}_t^*(1)\}$ から構成される $\boldsymbol{\theta}_{N/N}$ の推定量を

$$\boldsymbol{\theta}_{N/N}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \tilde{\mathcal{L}}_N^*(1, \boldsymbol{\theta})$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_N^*(1,\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{k=p+1}^{N} \frac{1}{bN} W\left(\frac{N-k}{bN}\right) \tilde{l}_k^*(1,\boldsymbol{\theta}) \\
\tilde{l}_k^*(1,\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2}\left\{\log\det\left(\tilde{D}_k^*(1,\boldsymbol{\theta})^2\right) + \left(\tilde{\boldsymbol{X}}_k^*(1)-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})\right)' \tilde{D}_k^*(1,\boldsymbol{\theta})^{-2}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}_k^*(1)-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})\right)\right\}
\end{aligned}$$

とする。このとき、適当な正則条件の下、次を得る。

定理 2

$$\sqrt{bN}(\boldsymbol{\theta}_{N/N}^* - \boldsymbol{\theta}_{N/N}) \xrightarrow{d^*} N(\mathbf{0}, \Sigma(1)^{-1}K(1)\Sigma(1)^{-1}) \quad a.s.$$

以上の結果を使って、最適ポートフォリオ推定量 $g(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N/N})$ に関して次の結果を得る。

定理 3

$$\sqrt{bN}(g(\boldsymbol{\theta}_{N/N}^*) - g(\boldsymbol{\theta}_{N/N})) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(\mathbf{0}, \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)\Sigma(1)^{-1}K(-1)\Sigma(1)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right)'\right) \quad a.s.$$

Measuring Judicial Independence Reconsidered:
Survival Analysis of Judicial Careers

福元健太郎　増山幹高

本稿は、裁判官が総括判事に到達するまでの年数を分析することによって、裁判官のキャリアを規定している要因を計量的に検証していく。ラムザイヤーらによれば、日本の裁判官は長期に政権を担ってきた自民党に忠実な「代理人」として行動しており、日本において司法が独立しているという通念は正しくない。こうした主張の根拠となっているのが、彼らの裁判官キャリアに関する計量分析である。ラムザイヤーらは青年法律家協会（青法協）に所属した裁判官が総括判事になるという意味において冷遇されることから、日本の司法には保守的な政治志向が浸透しているとする。ただし、彼らの計量分析には総括判事到達年数という時間的事象の特徴を把握せず、分析対象となる裁判官を恣意的に限定しているという問題がある。本稿では、総括判事到達が青法協所属に依存するのかということは総括判事到達年数という従属変数の捉え方によって異なるものであることを明らかにする。

本稿はまずラムザイヤーらの議論を概観し、彼らの裁判官キャリアに関する計量分析を再検証する。次いで、出世競争の中途退場や総括判事に到達しない裁判官も分析対象とする総括判事到達年数の生存分析モデルを推定していく。総括判事到達年数の連続時間モデルを検討し、状態移行と経過時間に特定の関係を想定しない「総括判事未到達関数」を推定し、青法協に所属した裁判官とそうでない裁判官に相違がみられるのかということを検証する。

D を事件の有無、 T を時刻、and T^*を潜在時刻、m を規模パラメータ、s を形状パラメータとする。T^* が対数ロジスティック分布に従うとすれば、

$$f(T^*) = (s/m)(T^*/m)^{s-1}/(1+(T^*/m)^s)^2,$$

また次の様にモデル化する。

$$m=exp(bW).$$

事件が観測されると尤度寄与分は

$$f(T)= (s/exp(bW))(T/exp(bW))^{s-1}/(1+(T/exp(bW))^s)^2.$$

存続が打ち切られると、

$$S(T) = \int_T^\infty f(T^*)dT^* = 1/(1+(T/m)^s) = 1/(1+(T/exp(bW))^s).$$

存続がT_0,で左切断されていると、尤度寄与分は事件が観測されると$f(T)/S(T_0)$, 打ち切られると$S(T)/S(T_0)$となる。

母集団が２つあり、リスクにさらされる母集団に属する確率を r とする。尤度寄与分

は事件が観測されると $r\,f(T)$, 打ち切られると $(1- r) + r\,S(T)$ となる。

i 番目のデータを、それに最も似ている（制御変数が M 似ている）m(i)番目のデータにマッチングさせると、処置 X の事件 D に対する平均処置効果は、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [X_i\{D_i(X_i=1, M_i) - D_i(X_{m(i)}=0, M_{m(i)}=M_i)\}+$$
$$(1-X_i)\{D_i(X_{m(i)}=1, M_{m(i)} = M_i) - D_i(X_i=0, M_i)\}],$$

処置 X の時間 T*に対する平均処置効果は、

$$\frac{1}{n(+)}\sum_{i=1}^{n(+)} [X_i\{T_i(X_i=1, M_i, D_i=1) - T_i(X_{m(i)}=0, M_{m(i)}=M_i, D_{m(i)} =1)\}+$$
$$(1-X_i)\{T_i(X_{m(i)}=1, M_{m(i)} = M_i, D_{m(i)} =1) - T_i(X_i=0, M_i, D_i=1)\}],$$

ここで $n(+)$ は両方とも事件が観測されているマッチされたペアの数である。つまり、１つでも打ち切りがあるペアは、ペアまるごと対象から外すことによって、バイアスを防いでいるのである。

以上のモデルを実際のデータにあてはめると、処置 X の事件 D に対する平均処置効果も、時間 T*に対する平均処置効果も、有意ではなかった。マッチングを施した後に、左切断と分割母集団を考慮した生存分析（対数ロジスティック分布）を適用した場合も、青年法律家協会は有意でなかった。

分割表における準対称性と その周辺

関東学院大学経済学部　　布能英一郎

1.　2 次元正方分割表における対称性, 周辺対称性, 準対称性

2 次元正方分割表に対する対称モデル、周辺対称モデル、準対称モデルは、広津 (1982) にその定義が与えられている。Caussinus(1965) の与えた準対称モデルの定義は、広津の定義をパラメータ変換したものであるが、こちらのほうが準対称モデルの確率構造をより直接的に理解できる。また、富澤 (2006) は、オッズ比を用いた準対称性に言及している。いずれの方法で準対称モデルを記述するにせよ、対称モデル、周辺対称モデル、準対称モデルの関係を示す次の定理は重要である。

定理 1　対称モデルが成り立つための必要十分条件は, 準対称モデルと周辺対称モデルの両方が成り立つことである.

MLE　対称モデルの下での MLE は Exact に求められている。周辺対称モデルの場合は、対角成分の MLE は Exact に求められているが、対角成分以外は、近似計算となる。詳細は、広津に記述されている。 準対称モデルの場合、計算により、尤度方程式 $x_{\cdot\cdot}\hat{p}_{i\cdot} = x_{i\cdot}$， $x_{\cdot\cdot}\hat{p}_{\cdot j} = x_{\cdot j}$， $x_{\cdot\cdot}(\hat{p}_{ij} + \hat{p}_{ji}) = x_{ij} + x_{ji}$ を得ることができる。この尤度方程式には代数的な解がないが、Iterative Scaling Procedure（ISP）によって MLE を求めることができる。広津の本では ISP の計算において、詳細が一部省略されている部分がある。

2.　3 次元正方分割表における準対称性

3 次元正方分割表のセル確率 $\{p_{ijk}\}$ に対して、広津は、次のようなパラメータ変換を導入した：

$$\theta_i = \log(\frac{p_{i11}}{p_{111}}),\quad \phi_j = \log(\frac{p_{1j1}}{p_{111}}),\quad \psi_k = \log(\frac{p_{11k}}{p_{111}}),\quad \lambda_{ij} = \log(\frac{p_{ij1}p_{111}}{p_{i11}p_{1j1}}),\quad \mu_{ik} = \log(\frac{p_{i1k}p_{111}}{p_{i11}p_{11k}}),$$

$$\nu_{jk} = \log(\frac{p_{1jk}p_{111}}{p_{1j1}p_{11k}}),\quad \xi_{ijk} = \log(\frac{p_{ijk}p_{i11}p_{1j1}p_{11k}}{p_{ij1}p_{i1k}p_{1jk}p_{111}})$$

さらに、 $\alpha_i = \exp(\theta_i)$， $\beta_j = \exp(\phi_j)$， $\gamma_k = \exp(\psi_k)$， $(\alpha\beta)_{ij} = \exp(\lambda_{ij})$， $(\alpha\gamma)_{ik} = \exp(\mu_{ik})$， $(\beta\gamma)_{jk} = \exp(\nu_{jk})$， $\phi_{ijk} = \exp(\xi_{ijk})$ とおくと $p_{ijk} = p_{111}\alpha_i\beta_j\gamma_k(\alpha\beta)_{ij}(\alpha\gamma)_{ik}(\beta\gamma)_{jk}\phi_{ijk}$ と書き表せる。また、3 次元分割表のセル確率に対して、cross product ratio は $\theta_{(i<j\,;\,s<t\,;\,u<v)} = (p_{isu}p_{itv}p_{jsv}p_{jtu})/(p_{isv}p_{itu}p_{jsu}p_{jtv})$ で定義されるものであった。それゆえ、上記の式に $p_{ijk} = p_{111}\alpha_i\beta_j\gamma_k(\alpha\beta)_{ij}(\alpha\gamma)_{ik}(\beta\gamma)_{jk}\phi_{ijk}$ を代入すると

$$\theta_{(i<j\,;\,s<t\,;\,u<v)} = \frac{p_{isu}p_{itv}p_{jsv}p_{jtu}}{p_{isv}p_{itu}p_{jsu}p_{jtv}} = \cdots = \frac{\phi_{isu}\phi_{itv}\phi_{jsv}\phi_{jtu}}{\phi_{isv}\phi_{itu}\phi_{jsu}\phi_{jtv}}$$

となり、cross product ratio $\theta_{(i<j\,;\,s<t\,;\,u<v)}$ に影響するのは 3 次の interaction ϕ_{ijk} のみであって、1 次の項 α_i, β_j, γ_k, 2 次の interaction $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ は関係しない。

3 次元正方分割表における準対称性の定義 (Agresti(2002), Tahata 他 (2008))　3 次元正方分割表が準対称モデルであるとは、そのセル確率 $\{p_{ijk}\}$ に関して上記のパラメータ変換を行ったとき、$\xi_{ijk} = \xi_{ikj} = \xi_{jki} =$

$\xi_{jik} = \xi_{kij} = \xi_{kji}$ が成り立つことをいう。 これは、$\phi_{ijk} = \phi_{ikj} = \phi_{jki} = \phi_{jik} = \phi_{kij} = \phi_{kji}$ と同値である。また、cross product ratio を用いると、

$$\theta_{(i<j\,;\,s<t\,;\,u<v)} = \theta_{(i<j\,;\,u<v\,;\,s<t)} = \theta_{(s<t\,;\,i<j\,;\,i<j)} = \theta_{(s<t\,;\,u<v\,;\,i<j)} = \theta_{(u<v\,;\,i<j\,;\,s<t)} = \theta_{(u<v\,;\,s<t\,;\,i<j)}$$

が成り立っていることである。

定理 2 (Bhapkar and Darroch(1990))　3 次元正方分割表にて、対称モデルが成り立つための必要十分条件は, 準対称モデルと周辺対称モデルの両方が成り立つことである.

MLE　3 次元準対称モデルに対しても、2 次元の場合と同様に尤度方程式および尤度方程式から ISP によって MLE を求めることができる。

3.　考察

準対称性を弱めた 2 つのモデルを考察し、その MLE を求めた。

モデル (1)　$\xi_{ijk} = \xi_{jki} = \xi_{kij}$ なるモデルを考えた。これは、3 次元正方分割表の変量の順番を cyclic に交換する場合に、その cross product ratio の値に変化がないというモデルである。

モデル (2)　$\xi_{ijk} = \xi_{ikj}$ なるモデルを考えた。これは、3 次元正方分割表の第 2 変量と第 3 変量の順番を入れ替えた場合にのみ、cross product ratio の値に変化がないというモデルである。

MLE　モデル (1), モデル (2) に対しても、3 次元準対称モデルの場合と同様に尤度方程式および尤度方程式から ISP によって MLE を求めることができた。

4.　Pooling incomplete samples の場合

準対称モデルに対して、Pooling incomplete samples が生じている場合を考えた。このような場合に、尤度方程式は求められたが、ISP によって MLE を求めるまでには至らなかった。モデル (1), モデル (2) に対して Pooling incomplete samples が生じている場合も同様であった。

参考文献　[1] Agresti, A. (2002). *Categorical Data Analysis,* 2nd ed., Wiley, New York.　[2] Bhapkar, V. P. and Darroch, J. N. (1990). Marginal symmetry and quasi symmetry of general order, *Journal of Multivariate Analysis,* **34**, 173-184.　[3] 広津千尋. (1982). 離散データ解析,　教育出版　[4] 田畑耕治, 宮本暢子, 富澤貞男. (2008). 正方分割表における対角一様連関対称モデル, 応用統計学会 2008 年度年会講演予稿集, 1-6　[5] Tahata, K., Takazawa, A. and Tomizawa, S. (2008). Collapsed Symmetry Model and its Decomposition for Multi-Way Tables with Ordered Categories,　*Journal of Japan Statistical Society*　**38**, 325-334.　[6] 富澤貞男. (2006) 統計学における正方分割表の解析. **数学**, **58**,　263-287.

閾値を持つ金利の期間構造モデルのパラメータ推定法

本田哲弘, 塩濱敬之　東京理科大学工学部, 102-0073, 東京都千代田区九段北 1-14-6

概 要

本論文は, 閾値を持つ金利の期間構造モデルのパラメータ推定方法と閾値パラメータの漸近有効性に関する論文である. 短期金利の変動のモデルには多くのモデルが提案されているが, 正確な尤度が構成できるモデルは少ない. そこで, これまで尤度を近似する様々な方法が提案されてきた. 尤度を求めることができる CKLS モデル (Vasicek モデルと CIR モデルを含む) に対して, 閾値を持つ金利モデルのパラメータ推定に最尤推定量とベイズ推定量を定義し, 閾値パラメータのベイズ推定量が漸近有効であることを示した. また, 遷移密度を定義できない閾値を持つ CKLS モデルに対して, Nowman (1997) による疑似最尤推定法と, Yu and Phillips (2001) による DDS 定理によって正規変換した最尤推定法とベイズ推定法を提案する. 理論結果はシミュレーションを通して検証し, 閾値パラメータのベイズ推定量が最尤推定量に比べて有効であることが確認できた. 最後に日本とアメリカの短期金利モデルの推定も行った.

金利リスクは銀行などの金融機関や企業にとって最も影響力のあるリスクファクターであり, これまで数多くの金利変動を表すモデルが開発されてきた. 多くの企業は短期及び長期において, 金利変動のリスクにさらされている. 金利の変動リスクをヘッジするためには, 金利の変動を予測する必要がある. このため短期, 長期の金利を適切に推定することが重要である. また市場において取引される金利オプション等のデリバティブにおいてその理論価格を導出するためには, 適切な金利のモデル化が必要となる. 特に短期金利の変動は金利の期間構造を通じて長期金利に影響を与えることから, 短期金利の確率過程が果たす役割は大きい.

伝統的な金利の期間構造モデルには Vasiek (1977) や Cox, Ingersoll and Ross (1985, CIR) によるモデルがあり, これらのモデルでは瞬間的スポットレートが平均回帰するようなディフュージョン過程で表現され, アフィン期間構造モデルと呼ばれる. Vasicek モデルや CIR モデルの他の定式化では, 金利のボラティリティが金利水準に依存して変動する Chan, Karolyoi, Longstaff and Sanders (1992) によるモデルがある. その他のモデルの定式化については, Duffie and Kan (1996) や Dai Singleton (2000) が詳しく述べている.

従来型の金利の期間構造モデルは理論分析, 実証分析の両側面から一定の成果を挙げたが, 短期金利の動的特徴には明らかな非線形性が見られることもまた多くの実証分析で報告されている. Goldstein and Keirstead (1997) は, 吸収壁のある金利の期間構造モデルを提案し, 金利水準が低いレベルで推移するときにもボラティリティが高くなることを考慮した. また, Gorovoi and Linetsky (2004) はゼロ金利政策下の 1996 年から 2003 年の日本の短期金利のボラティリティが高い水準で推移していることを指摘し, ボラティリティが金利水準が異なっても一定である Vasicek モデルやボラティリティが金利水準が低くなると小さくなる CIR モデルではこのような変動特性を捉えることができないと述べている. また, アメリカの短期金利についても, 金利水準によってレジームが変化する特徴が明らかである. Granger (1993) はアメリカの短期金利が長期と短期の金利水準のスプレッドに非線形に依存すると報告し, Gray(1996) や Bansal and Zhou (2002) は短期金利の構造変化モデルを推定し, 構造変化なしのモデルよりも優れていると報告した. パラメトリックモデルに構造変化を取り入れた推定には, Pfann, Schotman and Tschernig (1996) や Ang and Bekaert(2002a, b) などがある. またアフィン期間構造モデルではなくドリフト関数, ディフュージョン関数のノンパラメトリック推定を行った Aït-Sahalia (1996) は短期金利の非線形性を指摘している. 短期金利モデルの変動特性に関する詳細なサーベイは Bali and Wu (2006) が詳しい.

本論文では, 短期金利が示す非線形性を構造変化モデルで推定するのではなく, 閾値モデルで推定することを試みる. Carrasco(2002) は, 構造変化モデルやマルコフ切換モデルによる非線形性よりも, 閾値を用いたモデルの方が, 非線形性の検出力が高いという結果を報告した. 閾値による非線形性を短期金利の推定に応用した先行研究には, TAR-GARCH モデルを用いた Gospodinov(2005) や, Lanne and Saikkonen(2002, 2003) がある.

連続時間金利期間構造モデルの推定には, Aït-Sahalia (2002) や Durham and Gallant (2002) による最尤法 (ML) や Chan, Karolyoi, Longstaff and Sanders (1992) による一般化モーメント法 (GMM) がある. モデルの誤特定化がない場合, 最尤推定の良さは一致性, 漸近有効性といった漸近特性にある. そのため, 離散近似の方

法の違いや, 計算方法の提案を含めてこれまで多くの (疑似) 最尤推定法が提案されてきた. 連続時間モデルの最尤推定法についてはPhillips and Yu (2007) が詳しい.

本論文では閾値を持つ金利の期間構造モデルに対する最尤推定量とベイズ推定量を定義し, その漸近特性を明らかにする. また様々なパラメータ推定方法に対して数値実験によるパフォーマンス比較を行う.

本論文の構成は次の通りである. 第2章では本論文で使用する短期金利モデル (閾値を持つCKLSモデル) について定義する. 第3章では, 第2章で定義したモデルのパラメータに対して最尤推定量 (MLE) とベイズ推定量 (BE) を定義し, その漸近理論を明らかにする. 第4章では, パラメータ推定方法を示し, 第5章では数値実験を行い各推定方法の比較分析を行い, 実データを用いた分析も行う. 第6章では本研究で得られた結果の考察と今後の課題について述べる.

参考文献

[1] Ahn, D. H. and Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics, *Review of Financial Studies*, **12**, 721-762.

[2] Aït-Sahalia, Y. (1996). Testing continuous time models of the spot interest rate, *Review of Financial Studies*, **9**, 385-426.

[3] Aït-Sahalia, Y. (2002). Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions: a closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223-262.

[4] Ang, A. and Bekaert, G. (2002a). Regime switches in interest rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 163-182.

[5] Ang, A. and Bekaert, G. (2002b). Short rate nonlinearities and regime switches, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **26**, 1243-1274.

[6] Bali, T. G. and Wu, L. (2006). A comprehensive analysis of the short-term interest-rate dynamics, *Journal of Banking & Finance*, **30**, 1269-1290.

[7] Bansal, R. and Zhou, H. (2002). Term structure of interest rates with regime shifts, *Journal of Finance*, **57**, 1997-2043.

[8] Carrasco, M. (2002). Misspecified structural change, threshold, and markov-switching models, *Journal of Econometrics*, **109**, 239-273.

[9] Chan, K.C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209-1227.

[10] Cox, C., Ingersoll, J. and Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385-407.

[11] Dai, Q. and Singleton, K. (2000). Specification analysis of affine term structure models, *Journal of Finance*, **6**, 379-406.

[12] Duffie, D. and Kan, R. (1996). A yield factor model of interest rates, *Mathematical Finance*, **6**, 379-406.

[13] Durham, G. B. and Gallant, A. R. (2002). Numerical techniques for maximum likelihood estimation of continuous time processes, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 297-316.

[14] Goldstein, R. and Keirstead, W. P. (1997). On the term structure of interest rates in the presence of reflecting and absorbing boundaries, Working paper, Ohio State University.

[15] Gorovoi, V. and Linesky, V. (2004). Black's model of interest rates as options, eigen function expansions and Japanese interest rate, *Mathematics Finance*, **14**, 49-79.

[16] Gospodinov, N. (2005). Testing for threshold nonlinearity in short-term interest rates, *Journal of Financial Econometrics*, **3**, 344-371.

[17] Granger, C. W. J. (1993). *Modeling Non-Linear Relationship Between Long-Memory Variables*, University of California, San Diego, CA.

[18] Gray, S. F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime switching process, *Journal of Financial Economics*, **42**, 27-62.

[19] Lanne, M. and Saikkonen, P. (2002). Threshold autoregressions for strongly autocorrelated time series, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 282-289.

[20] Lanne, M. and Saikkonen, P. (2003). Modeling the U.S. short-term interest rate by mixture autoregressive processes, *Journal of Financial Econometrics*, **1**, 96-125.

[21] Nowman, K. B. (1997). Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates, *Journal of Finance*, **52**, 1695-1703.

[22] Pfann, G. A., Schotman, P. C. and Tschernig, R. (1996). Nonlinear interest rate dynamics and implications for the term structure, *Journal of Econometrics*, **74**, 149-176.

[23] Phillips, P.C.B. and Yu, J. (2007). Maximum likelihood and gaussian estimation of continuous time models in finance, Cowles foundation discussion papers No.1597, Yale University.

[24] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.

[25] Yu, J. and Phillips, P. C. B. (2001). Gaussian approach for estimating continuous time models of the short term interest rate, *The Econometrics Journal*, **4**, 211-225.

有限混合分布による測定データの評価について

高崎経済大学　宮田　庸一

1　はじめに

与えられたデータに対して, 分布関数もしくは分位点を用いた評価を行うときには, 従来確率分布として正規分布が仮定されてきた. しかし実際には, データに打ち切りあったり，　多峰型になることもしばしばある. このため, 我々はその問題点を改善するために, 打ち切り混合分布の分位点による評価方法を提案し, その漸近的な妥当性を示した. 上側に打ち切りのある混合分布は以下の形で与えられる.

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{g} \pi_j \left\{ p_j(x|\boldsymbol{\theta}_j) 1_{[x<c]} + \int_c^{\infty} p_j(x|\boldsymbol{\theta}_j) dx 1_{[x=c]} \right\} \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, ..., \boldsymbol{\theta}_g^T, \pi_1, ..., \pi_{g-1})^T$ を未知パラメーター, g をコンポーネント数, c を既知の打ち切りの定数とし, $1_{[\cdot]}$ を定義関数とする. また各コンポーネント $p_j(x|\boldsymbol{\theta}_j)$ は確率密度関数とする.

2　強一致性

佐渡島シンポジウムにおいて, 上記のモデル (1) に対する最尤推定量 (MLE), 分布関数, 分位点の強一致性について述べた. いくつかの記号を定義する. $\boldsymbol{\pi} \in A \equiv \{(\pi_1, ..., \pi_g) | \pi_i \geq 0, \sum \pi_i = 1\}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \equiv \{(\theta_1, ..., \theta_g) | \theta_i \in \Theta_i, (i = 1, .., g)\}$ とし, $\Gamma = A \times \boldsymbol{\Theta}$ をパラメーター空間とする. また $\boldsymbol{\pi}^0$ と $\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0, ..., \theta_g^0)$ を真のパラメーターとし, $\Gamma(\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\theta}^0) \equiv \{(\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\theta}^0) \in \Gamma \{f(x|\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\theta}^0) = f(x|\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\theta})\}$ を真のパラメーターと同一視できるパラメーターの集合とする. また $dis(\Omega_1, \Omega_2) \equiv \inf_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_2} |x - y|$ をハウスドルフ距離とし, $supp(f_i) = \{x \in \mathbb{R} | f_i(x|\theta_i) > 0\}$ を各コンポーネントの台, $E_{\theta_i^0}[g] = \int_{-\infty}^{c} g(x) f_i(x|\theta_i) dx + g(c) \int_c^{\infty} g(x) f_i(x|\theta_i) dx$ とする.

2.1　Assumptions

(a) Γ は有界閉集合

(b) $(1 \leq i \leq g)$ For $\forall \theta_i \in \Theta_i$, $f_i(x|\theta_i)$ は確率密度関数, $supp(f_i)$ はパラメーターに依存しなく全て同一, そして $f_i(x|\theta_i^1) = f_i(x|\theta_i^2) \Longrightarrow \theta_i^1 = \theta_i^2$.

(c) $(1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g)$ $g_i(x|\theta_i) \equiv \max\{f_i(x|\theta_i), 1\}$ とおく. この時 $E_{\theta_i^0}[\log f_j(X|\theta_j)] > -\infty$, $E_{\theta_i^0}[\log g_j(X|\theta_j)] < \infty$, $E_{\theta_i^0}[\log\{\sup_{|\theta_j - \theta_j^0| \leq \rho} g_j(X|\theta_j)\}] < \infty$ for small $\rho > 0$, そして $E_{\theta_i^0}[\log\{\sup_{|\theta_j| \geq r > 0} g_j(X|\theta_j)\}] < \infty$ for large $r > 0$.

(d) $\lim_{\theta_i \to \theta_i^0} f_i(x|\theta_i) = f_i(x|\theta_i^0) a.e$ for $\theta_i^0, \theta_i \in \Theta_i$, そして $\lim_{|\theta_i| \to \infty} f_i(x|\theta_i) = 0$ a.e.

2.2　Main Results

$(\boldsymbol{\pi}^n, \boldsymbol{\theta}^n)$ を仮定 (a) の下での MLE とする

定理 1 仮定 (b)–(d) の下で $dis\{(\boldsymbol{\pi}^n, \boldsymbol{\theta}^n), \Gamma(\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\theta}^0)\} \xrightarrow{wp1} 0$.

Proof Cheng and Liu (2001) のアプローチと同様

定理 2 仮定 (b)–(d) の下で, $f(x|\boldsymbol{\pi}^n, \boldsymbol{\theta}^n) \xrightarrow{wp1} f(x|\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\theta}^0)$.

PROOF 定理 1 と仮定 (d) より成り立つ

定理 3 仮定 (b)–(d) の下で, $F_n(x) \xrightarrow{wp1} F(x)$:真の分布関数

PROOF 定理 2 に Scheffe の定理を適用すれば成り立つ

定理 4 $\xi_p = \inf\{x|F(x) \leq p\}$, $\hat{\xi}_p = \inf\{x|F_n(x) \leq p\}$ とする. ξ_p が $F(x-) \leq p \leq F(x)$ の一意解である時, 仮定 (b)–(d) の下で, $\hat{\xi}_p \xrightarrow{wp1} \xi_p$.

PROOF Serfling(1980) に従えば示せる.

注意上記の結果は以下の一般の打ち切りモデルに対しても成り立つ.

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{g} \pi_j \left\{ p_j(x|\boldsymbol{\theta}_j) 1_{[x \in R_0]} + \sum_{k=1}^{q} 1_{[x=c_k]} \int_{R_k} p_j(x|\boldsymbol{\theta}_j) dx \right\} \tag{2}$$

ここで $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{q} R_i$ とする.

3 EM-algorithm

打ち切りモデル (1) に対して EM-algorithm を用いて MLE を求める. この時, ある程度大きな x に対して $\phi(x)/(1-\Phi(x))$ を評価する必要がある (ここで $\phi(z)$ と $\Phi(z)$ はそれぞれ標準正規分布の pdf, cdf). しかしながら Chauveau (1995) に指摘されているように, 数値積分が必要な場合, その誤差のため M-step がうまくいかない. ここで我々は $\dfrac{\phi(x)}{1-\Phi(x)} = exp\left\{\log\phi(x) - \log\displaystyle\int_x^\infty \phi(z)dz\right\}$ のように coding を工夫することにより改善できることを述べた. R の場合の code:`term<-function(x){exp(-pnorm(x,log=T,lower.tail=F)+dnorm(x,log=T))}`

4 実データへの応用

実データの応用として, 田邊 (2007) により提案された身体のバランスを測定したデータを用いた. このデータは 2007 年 4 月 29 日から 2007 年 10 月 27 日にかけて測定されたものであるが, 上側に時間 (60 秒) の打ち切りがあり, 年代によっては多峰分布となることがわかっている. このデータに対して, モデル (1) を当てはめ, コンポーネントの数は AIC3 により推定し, 得点評価を行った. また打ち切り正規分布と打ち切り混合正規分布の数値比較, 混合分布と打ち切り混合分布の数値比較を示した.

参考文献

[1] Chauveau, D. (1995). A stochastic EM algorithm for mixtures with censored data, 46, 1–25.

[2] Cheng, R.C.H, and Liu, W.B. (2001). The Consistency of Estimators in Finite Mixture Models, *Scandinavian Journal of Statistics*, 603–616.

[3] McLachlan, G. and Peel, D. (2000) *Finite Mixture Models*, Wiley InterScience.

[4] Redner, R. (1981) Note on the Consistency of the Maximim Likelihood Estimate for Nonidentifiable Distributions, *Ann. Statist.* **9**, 225–228.

[5] Wald, A. (1949). Note on the consistency of the maximum likelihood estimates. *Ann. Math. Statist.* 20, 595–601.