

債務担保証券 (CDO) の統計的解析

統計数理研究所・リスク解析戦略研究センター 安藤 雅和

同志社大学理工学部 津田 博史

ラッセルインベストメント株式会社 田野倉 葉子

統計数理研究所 佐藤 整尚

統計数理研究所 北川 源四郎

債務担保証券 (以下 CDO と呼ぶ) の価格評価やリスク計測に用いられているものにファクターコピュラモデルがある。デフォルト発生時刻の同時分布を比較的簡単な関数を用いて表現できるところが特長といえるが、あらかじめ分布を仮定しなければならないため、変量間の依存関係を必ずしもうまく表しきれないことがある。これに対して、コピュラそのものを市場データからインプライドする方法が、Hull and White (2006) により提案された。インプライド・コピュラアプローチと呼ばれるこの方法は、ハザード率シナリオの実現確率を実際の市場データから求めるものであり、これにより公正なプレミアムの評価や市況を反映したデフォルト相関を求めることが可能となる。しかし、それは観測時点ごとに求められたハザード率の確率分布であって、時系列構造については考慮されていない。

本報告では、インプライド・コピュラアプローチの拡張となる時系列構造を取り入れた新たなダイナミック・インプライド・コピュラアプローチを提案した。これにより、ハザード率の将来予測が可能となれば、証券化商品に関するリスクマネジメントができるようになる。

1. CDO の価格評価モデル

CDO の価格評価は、契約期間における期待キャッシュ・フローの現在価値を求めることによりおこなえる。当該トランシェの現在価値は、Hull and White (2006) により示された評価モデルを用いると $V = A(s) + B(s) - C$ と表わされる。 s は当該トランシェのプレミアムを表し、 $A(s), B(s), C$ はそれぞれ次に示す式となる。

$$\begin{aligned} A(s) &= s \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) E[P(t_i)] D(t_i) \\ (1.1) \quad B(s) &= s \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{2} \right) \{ E[P(t_{i-1})] - E[P(t_i)] \} D \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \\ C &= (1 - R) \sum_{i=1}^n \{ E[P(t_{i-1})] - E[P(t_i)] \} D \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

ここで t_i ($1 \leq i \leq n$) は i 番目の支払時刻、 t_0 を開始時刻とし、 $t_n = T$ を満期とする。 $P(t_i)$ は t_i 時点の残存想定元本を表す。 $D(t)$ は現在時刻における満期 t のディスカウントファクターであり、 R は回収率を表す。このような設定のもとで当該トランシェの現在価値を計算するには支払時刻 t_i での残存想定元本の期待値 $E[P(t_i)]$ を求めなければならない。デフォルト時刻分布をどのように定義するかによって信用リスク評価が分かれてくる。

2. ダイナミック・インプライド・コピュラアプローチ

デフォルトがポワソン過程に従って起きると仮定した場合、債務者 j の潜在デフォルト要因 M を与えたもとでの時刻 t のハザード率を $\lambda_j(t|M)$ とすると、ハザード率はデフォルト時刻の分布 $Q_j(t|M)$ と次のように関係づけられる。

$$\lambda_j(t|M) = \frac{dQ_j(t|M)/dt}{1 - Q_j(t|M)}$$

これにより、潜在デフォルト要因 M の確率分布に応じた λ_j の期間構造が明らかとなるが、Hull and White (2006) が提案したインプライド・コピュラアプローチは、ハザード率シナリオ $\lambda_k, k = 1, \dots, K$ を事前に与えて、市況に適合するように市場データを用いて確率分布を求める方法といえる。具体的には、時刻 t の条件付き累積デフォルト確率を

$$Q(t|\lambda_k) = 1 - \exp(-\lambda_k t) \quad k = 1, \dots, K$$

とし、 K 個からなるハザード率シナリオ λ_k の確率 π_k を推定することになる。実際の市場からは CDS インデックスと各トランシェの спреッドが得られるため、(1.1) 式の当該トランシェの現在価値 V の式 ($V(s_m, \lambda_k)$ と表す) を用いて、次の制約条件 $\sum_{k=1}^K \pi_k V(s_m, \lambda_k) = 0, m = 1, \dots, 6, \sum_{k=1}^K \pi_k = 1, \pi_k \geq 0, k = 1, \dots, K$ を満たす π_k を求めることになる。

ただし、インプライド・コピュラアプローチは、将来のハザード率の分布の期待値 $\bar{\lambda}_t$ を予測することができないので、各時点ごとのハザード率の期待値 $\bar{\lambda}_t$ のモデルを推定し、将来予測を行う方法としてダイナミック・インプライド・コピュラアプローチを提案する。

ハザード率の時系列データは、非定常であり、ところどころ大きな変動も見られることから、ハザード率の時系列構造を表現するモデルとして、非ガウス型のハザード率モデルを提案する。

$$(2.1) \quad \Delta^k t_n = v_n$$

$$(2.2) \quad \bar{\lambda}_n = t_n + w_n$$

Δ は時間差分オペレータとし、 $\bar{\lambda}_n$ はインプライド・コピュラアプローチにより推定されたハザード率分布の期待値とする。システムノイズ v_n と観測ノイズ w_n は、それぞれ密度関数 $q(v)$ および $r(w)$ に従う 1 次元のホワイトノイズとする。初期状態ベクトル x_0 は密度関数 $p_0(x)$ に従うものとする。実際のモデルの推定、予測には Kitagawa(1996) により提案されたモンテカルロ・フィルタを用いた。

実証分析として、Bloomberg L.P. より入手した 2005 年 9 月 23 日から 2008 年 8 月 28 日までの 5 年満期の北米の CDS インデックス CDX.NA.IG と欧州の CDS インデックス iTraxx Europe の спреッド及びこれら CDS インデックスの構成銘柄を参照資産とする CDO のトランチドインデックスの спреッドの日次データの終値を用いて、ダイナミック・インプライド・コピュラアプローチによるハザード率の時系列モデルの推定と一期先予測をおこない、CDO の一期先の価格評価をおこなった。日次のハザード率分布の推定結果から、2007 年の前半までは、ハザード率分布の峰はハザード率が低い方に移動しているが、サブプライム問題が取りざたされるころから高い方に移動し、分散度も大きくなる様子が確認できた。そして、モンテカルロフィルタを用いた спреッド値の一期先予測では、各トランシェの спреッド値が上昇する時期（信用リスクが高まる）の方が下降する時期よりも予測誤差が小さいことが確認できた。

Hull and White (2006) により導入されたインプライド・コピュラアプローチに、時系列構造をもつモデルを仮定した新たなダイナミック・インプライド・コピュラアプローチを提案し、実証分析として CDO の価格評価をおこなった。リスクマネジメントの観点から役立つことが期待される。

参考文献

- [1] Hull, J. and White, A. (2006) Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach, *Journal of Derivatives*, 14, 8-28.
- [2] Kitagawa, G. (1996) Monte Carlo filtering and smoothing method for nonlinear non-Gaussian state space models, *Journal of Computational Graphical Statistics*, 5(1), 1-25.
- [3] 室町幸雄 (2007) 信用リスク計測と CDO の価格付け, 朝倉出版.