ADF 検定統計量を用いた共分散構造に関する検定におけるカイ２乗近似の改良

福井大・教育地域　　松本智恵子
広島大・理　　柳原　宏和
広島大・理　　若木　宏文

$\boldsymbol{y}$ を平均 $\mathrm{E}[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\mathrm{Cov}[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{\Sigma}$ を持つ p 次元確率ベクトルとし，$\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ を $\boldsymbol{y}$ からの n 個の独立標本とする．このとき，以下のような共分散構造に関する検定問題を考える．

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}), \quad H_1 : \text{not } H_0. \tag{1}$$

但し，$\boldsymbol{\theta}$ は $q \times 1$ 未知パラメータベクトルであるとする．

検定問題 (1) を考えるとき，多くの場合 $\boldsymbol{y}$ に正規性を仮定する．しかしながら，$\boldsymbol{y}$ の真の分布が正規分布でないとき，正規性の仮定のもとで提案された検定統計量の帰無分布は真の分布の尖度に基づく重みを持った χ^2-分布の重み付き和の分布に収束することが知られている (Browne (1984), Yanagihara et al. (2005) 等参照)．その為，真の分布が正規分布ではないときに χ^2-近似を用いて検定を行うと，パーセント点がずれ，解析者が望む有意水準と実際の有意水準が大きく異なってしまい，検定結果に誤りを与えてしまうことがある．

一方，Browne (1984) により提案された Asymptotically Distribution-Free (ADF) 検定統計量は，このような正規性からのずれに対して頑健な検定統計量であり，実際に，その帰無分布は真の分布がどのような分布であっても自由度 $p^* - q$ の χ^2 分布に収束することが知られている．ここで，$p^* = p(p+1)/2$ である．

そのような ADF 検定統計量は以下のように定義される：

$$T_{\mathrm{ADF}} = n \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\mathrm{vech}\left\{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right\}' \boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}}^{-1} \mathrm{vech}\left\{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})\right\} \right], \tag{2}$$

但し, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}}$ は，$\bar{\boldsymbol{y}} = n^{-1}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{y}_i$，$\boldsymbol{S} = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})'$ としたとき，

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{vech}\left\{(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})' - \boldsymbol{S}\right\} \mathrm{vech}\left\{(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})' - \boldsymbol{S}\right\}',$$

と定義されるものとする（vech については Magnus and Neudecker (1988), pp. 48-50，等を参照）．

しかしながら，(2) 式の検定統計量は，観測値の次元 p が大きい時には，たとえ標本の大きさ n がある程度大きく，また真の分布が正規分布である場合でも χ^2-近似の精度が悪くなることが知られている（例えば Hu et al. (1992) 等参照）．そこで，本発表では，真の分布が正規分布であるときの T_{ADF} の期待値の漸近展開を帰無仮説のもとで求め，それを利用して Bartlett 補正を行うことで，χ^2 近似の改良を行うことを考える．理論的な保証は無いが，正規性のもとでの Bartlett 補正項は，たとえ真の分布が非正規であったとしてもある程度は機能すると予測される．

共分散構造としては特に，既知の $p \times p$ 行列 $\boldsymbol{G}_1, \ldots, \boldsymbol{G}_q$ を用いて表現される線形構造

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \boldsymbol{G}_1 + \cdots + \theta_q \boldsymbol{G}_q,$$

を考える．このとき，$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ とすると，(2) 式の検定統計量は以下のように書き換えることができる：

$$T_{\mathrm{ADF}} = n \mathrm{vech}(\boldsymbol{S})' \left\{ \boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}}^{-1} - \boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{S}_{\mathrm{Y}}^{-1} \right\} \mathrm{vech}(\boldsymbol{S}). \tag{3}$$

vec と vech の性質（Magnus and Neudecker (1988) 参照）を利用すると，帰無仮説のもとで，$\boldsymbol{y}$ の平均ベクトルと共分散行列は一般性を失うことなく $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{I}_p$ とすることができる．以下，$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})$,

$\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mathbf{0}$，$\mathrm{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}]=\boldsymbol{I}_p$ とする．(3) 式の検定統計量は

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{ADF}} \;&= \boldsymbol{v}'\Xi\boldsymbol{v}\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\boldsymbol{v}'\Xi\boldsymbol{Q}_1\Xi\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{v}'\Xi\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n}\left\{\boldsymbol{v}'\Xi\boldsymbol{Q}_1\Xi\boldsymbol{Q}_1\Xi\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'\Xi\boldsymbol{Q}_2\Xi\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}'\Xi\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{v}'\Xi\boldsymbol{Q}_1\Xi\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')+\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')'\Xi\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')\right\}\\
&\quad+O_p(n^{-3/2}),
\end{aligned}
$$

のように確率展開することができる．但し，$\boldsymbol{D}_p^+$ は $\boldsymbol{D}_p^+\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})=\mathrm{vech}(\boldsymbol{A})$ を満たす $p^*\times p^2$ 行列であるとし，

$$
\boldsymbol{z}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}_j,\quad \boldsymbol{V}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\varepsilon}_j\boldsymbol{\varepsilon}_j'-\boldsymbol{I}_p),\quad \boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{z}\otimes\boldsymbol{I}_p)+(\boldsymbol{I}_p\otimes\boldsymbol{z}),\quad \boldsymbol{v}=\mathrm{vech}(\boldsymbol{V}),\quad \boldsymbol{a}=\mathrm{vech}\boldsymbol{I}_p,
$$

$$
\boldsymbol{W}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_i')\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_i')'-\boldsymbol{\Omega}\right\},\quad \boldsymbol{\Omega}=\mathrm{E}\left[\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')'\right],
$$

$$
\boldsymbol{R}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{\varepsilon}_i')\boldsymbol{\varepsilon}_i'-\boldsymbol{\Gamma}\right\},\quad \boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{E}\left[\mathrm{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\boldsymbol{\varepsilon}'\right],
$$

$$
\boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\Psi}^{-1}-\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\Psi}^{-1},\quad \boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}',
$$

$$
\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{D}_p^{+'}-\boldsymbol{D}_p^+\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Gamma}'-\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{a}\boldsymbol{v}',
$$

$$
\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{D}_p^+\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{D}_p^{+'}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{D}_p^{+'}-\boldsymbol{D}_p^+\boldsymbol{Z}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{a}\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')'+\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'+\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}\mathrm{vech}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}')',
$$

である．このとき，$\boldsymbol{\varepsilon}$ が正規分布に従うと仮定した場合における検定統計量 (3) の期待値は

$$
\mathrm{E}[T_{\mathrm{ADF}}]=(p^*-q)\left\{1+\frac{3(p^*-q+1)}{n}\right\}+o(n^{-1}), \tag{4}
$$

となる．この結果を利用することにより，Bartlett 補正された検定統計量を

$$
\tilde{T}_{\mathrm{ADF}}\;=\frac{nT_{\mathrm{ADF}}}{n+3(p^*-q+1)}, \tag{5}
$$

と提案することができる．また，同様の仮定のもとで，検定統計量 (3) の 2 乗の期待値 $\mathrm{E}[T_{\mathrm{ADF}}^2]$ は，

$$
\mathrm{E}[T_{\mathrm{ADF}}^2]=(p^*-q)(p^*-q+2)\left\{1+\frac{6(p^*-q)+9}{n}\right\}+o(n^{-1}), \tag{6}
$$

となる．この結果を利用して，検定統計量 (3) について修正 Bartlett 補正 (Fujikoshi (2000) 参照) を考えると，以下のような検定統計量が提案される：

$$
Y_{1,\mathrm{ADF}}=\frac{1}{2}\left\{3n-3(p^*-q)-2\right\}\log\left(1+\frac{2}{3n}T_{\mathrm{ADF}}\right), \tag{7}
$$

$$
Y_{3,\mathrm{ADF}}=\frac{1}{2}\left\{3n-3(p^*-q)-2\right\}\left\{1-\exp\left(-\frac{2}{3n}T_{\mathrm{ADF}}\right)\right\}. \tag{8}
$$

引用文献:

1. Browne, M. W. (1984). Asymptotically distribution free methods in the analysis of covariance structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **37**, 62–83.
2. Fujikoshi, Y. (2000). Transformations with inproved chi-squared approximations. *J. Multivariate Anal.*, **72**, 249–263.
3. Hu, L., Bentler, P. M. and Kano, Y. (1992). Can test statistics in covariance structure analysis be trusted ? *Psychological Bulletin*, **112**, 351–362.
4. Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics.* Wiley, New York.