Workshop at Hokkaido University (December 5–7, 2007)

On the Use of Long-term Multipower Variations in Estimation Problem

増田 弘毅

九州大学大学院数理学研究院
hiroki@math.kyushu-u.ac.jp
http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hiroki/

1 はじめに

確率過程 $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を離散時点データ $(X_{ih_n})_{i\le n}$ に基づいて推測する問題は多種多様である．近年, 固定期間高頻度データ ($h_n=T/n$, $T>0$ は所与の定数) による累積ボラティリティの推定が注目を集め, 実装容易な様々な統計手法が確立されてきた: e.g., [2]∼[7], [9], [10], [11], [12]. [13], [17]∼[20]. ランダムな規格化を介して, 一次までの理論は非常に広範な統計モデルに対して整備された.

本報告では, X に含まれるボラティリティ部分以外に含まれるパラメータの推定も同時に行う問題を考える．この場合 $T_n:=nh_n\to\infty$ なる漸近手法が不可欠になると同時に, X の長期期間に亘る性質が本質的となる．本報告では, 最も簡単なレヴィ過程の場合に焦点を当て, 特に拡散係数の推定に関し, 固定期間高頻度データの場合と同様の推定方式は可能かどうかを論じる.

2 レヴィ過程

以下の形の d 次元レヴィ過程を考える:

$$X_t^j=b^jt+\sum_{k\le d'}\sigma^{jk}w_t^k+\int_0^t\int_{|z|\le 1}z^j\tilde{\mu}(ds,dz)+\int_0^t\int_{|z|>1}z^j\mu(ds,dz),\quad j\le d.$$

我々はデータ $(X_{ih_n})_{i\le n}$ を得る．ここで $T_n\to\infty$ とする．$\Delta_i^nX=X_{ih_n}-X_{(i-1)h_n}$ と書く.

本報告では, 全てのパラメータの同時推定に先駆け, $T_n\to\infty$ の場合に $\sqrt{n}$-一致性をもつ C の推定量を構成する事を考える．ここで $C=(C^{jj'})_{j,j'\le d}:=\sigma^{\otimes 2}=[\sum_{k\le d'}\sigma^{jk}\sigma^{j'k}]_{j,j'\le d}$ は X の第二特性量である．C は正定値であると仮定する．我々は C の単独推定を第一に試みる; X の構造によっては, C 以外でも $\sqrt{n}$, もしくはより速い最適収束率を持つものも存在する (e.g., [1], [14], [15], and [16])．また, C 以外のパラメータの推定方法についても言及する.

3 拡散係数の単独推定

Realized multipower variation (MPV) の長期版の最も簡単なものは以下で与えられる: $m\in\mathbb{N}$, $n':=n-m+1$ とし, 各 $j\le d$ に対して

$$M_{m,n}(X^j)=\frac{1}{n'}\sum_{i\le n'}\prod_{l\le m}\left|\frac{\Delta_{i+l-1}^nX}{\sqrt{h_n}}\right|^{2/m}.$$

ここでの興味は以下の問題にある: $\{M_{m,n}(X^j)\}_{j\le d}$ に関して, “いかなる条件の下で C を最適収束率 $\sqrt{n}$ をもって推定可能か?” (Jacod [11] は $m=1$ の場合の漸近挙動を調べ上げた.)

$\mu_{2/m} := \int |y|^{2/m}\phi(y;0,1)dy = \frac{2^{1/m}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1+2/m}{2})$ とし, 統計量 $\hat{C}_n = (\hat{C}_n^{jj'})_{j,j'\le d}$ を以下で定義する:

$$\hat{C}_n^{jj'} = \begin{cases} \mu_{2/m}^{-m} M_{m,n}(X^j) & \text{for } j = j'; \\ 2^{-1}\mu_{2/m}^{-m}\left\{M_{m,n}(X^j + X^{j'}) - M_{m,n}(X^j) - M_{m,n}(X^{j'})\right\} & \text{for } j \neq j'. \end{cases}$$

Claim 1. $^{\exists}q > 0$ $\int_{|z|>1} |z|^q \nu(dz) < \infty$, $2 \le m$, $2 \le mq$ のとき, $\hat{C}_n \to^p C$.

$\beta := \inf\{\eta > 0 : \int_{|z|\le 1} |z|^\eta \nu(dz) < \infty\} \in [0,2]$ とする; cf. [8].

Claim 2. **Claim 1** の条件に加え, 更に, $\beta < 2/m < 1$, $^{\exists}\epsilon > 0$ $nh_n^{2-2/m} \vee nh_n^{1+2/m-\epsilon} \to 0$ とする. このとき $\sqrt{n}(\hat{C}_n - C)$ はある行列値正規分布へ弱収束する.

先行研究でよく調べられている $T_n \equiv T > 0$ の場合と異なり, ここでは大域的なモーメント条件が不可避的となる. また, $h_n \to 0$ に関する条件が幾つか生じる; 勿論, それらは全て $h_n = T/n$ なら自動的に満たされる.

本報告内容の一つの (自然な) 結論としては以下が挙げられる: C を最初から最適収束率 $\sqrt{n}$ で単独推定可能であるが, ドリフト項および飛躍部分を無視できる為の代償として固定期間高頻度データの場合には必要のない条件が課される. もしドリフトを始めからないものとするのであれば, 条件 $nh_n^{2-2/m} \vee nh_n^{1+2/m-\epsilon} \to 0$ は $nh_n^{2-2/m} \to 0$ で置き換えることができる. また, 証明において独立増分性を緩和できる箇所は多々あり, (長期版)MPV は, レヴィ過程のみならず, 様々な X に関する推定に対して有用な道具となり得る.

References

[1] Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2004), Fisher's information for discretely sampled Lévy processes. preprint.

[2] Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J., Podolskij, M. and Shephard, N. (2006), A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales. *From stochastic calculus to mathematical finance*, 33–68, Springer, Berlin.

[3] Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J. and Shephard, N. (2006), Limit theorems for bipower variation in financial econometrics. *Econometric Theory* **22**, 677–719.

[4] Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004), Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. (with discussion) *Journal of Financial Econometrics* **2**, 1–48.

[5] Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2005), Econometrics of testing jumps in financial economics using bipower variation. *Journal of Financial Econometrics* **4**, 1–30.

[6] Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2006), Impact of jumps on returns and realised variances: econometric analysis of time-deformed Lévy processes. *J. Econometrics* **131**, 217–252.

[7] Barndorff-Nielsen, O. E., Shephard, N. and Winkel, M. (2006), Limit theorems for multipower variation in the presence of jumps. *Stochastic Process. Appl.* **116**, 796–806.

[8] Blumenthal, R. M. and Getoor, R. K. (1961), Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments. *J. Math. Mech.* **10**, 493–516.

[9] Corcuera, J. M., Nualart, D. and Woerner, J. H. C. (2006), Power variation of some integral fractional processes. *Bernoulli* **12**, 713–735.

[10] Corcuera, J. M., Nualart, D. and Woerner, J. H. C. (2007), A functional central limit theorem for the realized power variation of integrated stable processes. *Stoch. Anal. Appl.* **25**, 169–186.

[11] Jacod, J. (2007), Asymptotic properties of power variations of Lévy processes. *ESAIM Probab. Stat.* **11**, 173–196.

[12] Jacod, J. (2007), Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales. To appear in *Stochastic Process. Appl.*

[13] Kinnebrock, S. and Podolskij, M. (2007), A note on the central limit theorem for bipower variation of general functions. To appear in *Stochastic Process. Appl.*

[14] Masuda, H., Notes on estimating inverse-Gaussian and gamma subordinators under high-frequency sampling. To appear in *Ann. Inst. Statist. Math.*

[15] Masuda, H. (2007), Joint estimation of discretely observed stable Lévy processes with symmetric Lévy density. submitted.

[16] Woerner, J. H. C. (2001), *Statistical Analysis for Discretely Observed Lévy Processes.* PhD thesis, University of Freiburg.

[17] Woerner, J. H. C. (2003), Variational sums and power variation: a unifying approach to model selection and estimation in semimartingale models. *Statist. Decisions* **21**, 47–68.

[18] Woerner, J. H. C. (2005), Estimation of integrated volatility in stochastic volatility models. *Appl. Stoch. Models Bus. Ind.* **21**, 27–44.

[19] Woerner, J. H. C. (2006), Power and multipower variation: inference for high frequency data. *Stochastic finance*, 343–364, Springer, New York.

[20] Woerner, J. H. C. (2007), Inference in Lévy-type stochastic volatility models. *Adv. in Appl. Probab.* **39**, 531–549.