ジャックナイフ法に基づく正規化変換について

九州大学大学院数理学研究院　　前園宜彦

1．エッジワース展開と正規化変換

$X_1,\cdots,X_n$ を母集団分布 F からの無作為標本とする．このとき母数 λ,θ に関連する 2 つの統計量 $T_n=T_n(X_1,\cdots,X_n), S_n=S_n(X_1,\cdots,X_n)$ に対して，比の統計量 T_n/S_n の漸近分布について考察した．標本相関係数，高次の基準化キュムラント，ピアソンの変動係数などが比の統計量である．この統計量について特定の分布を仮定することなく，分布の近似の改良を議論した．

元の統計量 T_n, S_n に対する適当なモーメント条件の下で

$$\frac{T_n}{S_n}=\frac{\lambda}{\theta}+n^{-1}\delta+n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\eta_1(X_i)+n^{-2}\sum_{C_{n,2}}\eta_2(X_i,X_j)+o_L(n^{-1/2})$$

の漸近表現を求めることができる．また漸近分散 $\xi^2=E[\eta_1^2(X_1)]$ の推定量 $\hat{\xi}^2$ が

$$\hat{\xi}^2=\xi^2+\sum_{i=1}^{n}b(X_i)+o_L(n^{-1/2}) \tag{1}$$

を満たすとする．ここで $b(x)=\eta_1^2(x)-\xi^2+2E[\eta_1(X_2)\eta_2(x,X_2)]$ である．このときスチューデント化統計量の $n^{-1/2}$ の項までのエッジワース展開を求めることができる．

$$\sup_x\left|P\left\{\frac{\sqrt{n}(T_n/S_n-\lambda/\theta)}{\hat{\xi}}\le x\right\}-Q_n(x)\right|=o(n^{-1/2}).$$

ここで

$$\begin{aligned}Q_n(x) &= \Phi(x)+n^{-1/2}\phi(x)\Big[\frac{1}{6\xi^3}\Big\{(2x^2+1)E[\eta_1^3(X_1)] \\ &\qquad +3(x^2+1)E[\eta_1(X_1)\eta_1(X_2)\eta_2(X_1,X_2)]\Big\}-\frac{\delta}{\xi}\Big]\end{aligned}$$

である．

さらに正規化変換を求めることもできる．

$$p=\frac{1}{3\xi^3}E[\eta_1^3(X_1)]+\frac{1}{2\xi^3}E[\eta_1(X_1)\eta_1(X_2)\eta_2(X_1,X_2)]$$

と

$$q=\frac{1}{6\xi^3}E[\eta_1^3(X_1)]+\frac{1}{2\xi^3}E[\eta_1(X_1)\eta_1(X_2)\eta_2(X_1,X_2)]-\frac{\delta}{\xi},$$

とおく．これらの推定量 $\hat{p},\hat{q}$ を使って

$$\pi(s)=s+\frac{\hat{p}}{\sqrt{n}}s^2+\frac{\hat{q}}{\sqrt{n}}+\frac{\hat{p}^2}{3n}s^3$$

が正規化変換となる．すなわち

$$\sup_x\left|P\left\{\pi\left(\frac{\sqrt{n}(T_n/S_n-\lambda/\theta)}{\hat{\xi}}\right)\le x\right\}-\Phi(x)\right|=o(n^{-1/2})$$

が成り立つ．この変換を利用するためにはいくつかの母数の推定が必要になる．

2．ジャックナイフ型推定量

正規化変換に現れる母数 ξ^2, p, q は元の統計量 T_n, S_n により推定できる．たとえば次のような母数が ξ^2, p, q に含まれる．

$$m_1 = E[\tau_1^3(X_1)],\ m_2 = E[\tau_1^2(X_1)\zeta_1(X_1)],\ m_3 = E[\tau_1(X_1)\tau_1(X_2)\tau_2(X_1, X_2)].$$

これらのジャックナイフ推定量は，ジャックナイフ擬似量を

$$\begin{aligned}
\hat{t}_1(i) &= T_n^{(i)} - T_n, \quad \hat{s}_1(i) = S_n^{(i)} - S_n, \\
\hat{t}_2(i,j) &= -[nT_n - (n-1)(T_n^{(i)} + T_n^{(j)}) + (n-2)T_n^{(i,j)}]
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\hat{m}_1 &= \frac{(n-1)^3}{n}\sum_{i=1}^n \hat{t}_1^3(i), \quad \hat{m}_2 = \frac{(n-1)^3}{n}\sum_{i=1}^n \hat{t}_1^2(i)\hat{s}_1(i), \\
\hat{m}_3 &= \frac{(n-1)^2}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}^n \hat{t}_1(i)\hat{t}_1(j)\hat{t}_2(i,j)
\end{aligned}$$

で与えられる．これらの推定量の一致性はモーメントに対する条件を仮定すると示すことができる．

比の統計量 T_n/S_n に基づくジャックナイフ推定も可能である．ジャックナイフ擬似量を

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1(i) &= \frac{T_n^{(i)}}{S_n^{(i)}} - \frac{T_n}{S_n}, \\
\hat{u}_2(i,j) &= -\left[n\frac{T_n}{S_n} - (n-1)\left\{\frac{T_n^{(i)}}{S_n^{(i)}} + \frac{T_n^{(j)}}{S_n^{(j)}}\right\} + (n-2)\frac{T_n^{(i,j)}}{S_n^{(i,j)}}\right], \\
\overline{T_n/S_n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{T_n^{(i)}}{S_n^{(i)}}
\end{aligned}$$

とおく．未知母数 $\delta,\ \xi^2,\ e_1 = E[\eta_1^3(X_1)],\ e_2 = E[\eta_1(X_1)\eta_1(X_2)\eta_2(X_1,X_2)]$ のそれぞれの推定量は

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} &= n(n-1)(\overline{T_n/S_n} - T_n/S_n), \\
\hat{\xi}^2 &= (n-1)\sum_{i=1}^n \hat{u}_1^2(i), \\
\hat{e}_1 &= \frac{(n-1)^3}{n}\sum_{i=1}^n \hat{u}_1^3(i), \\
\hat{e}_2 &= \frac{(n-1)^2}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{i\neq j}^n \hat{u}_1^2(i)\hat{u}_1^2(j)\hat{u}_2(i,j)
\end{aligned}$$

で与えられる．これらの推定量を使う方が正規化変換はシンプルなものになるが，一致性を示すには，$\hat{m}_i$ より強い条件が必要になる．

参考文献

「統計的推測の漸近理論」前園宜彦，九州大学出版会，2001 年