二変量極値分布における従属関数の推定

北海道大学大学院経済学研究科　　鈴川晶夫

1. はじめに

二変量極値分布は, 生存時間研究, 環境研究, 信頼性研究などにおいて重要な役割を果たす二変量確率分布である. 一変量極値分布に対して, 有限次元の自然なパラメトリック分布族が存在することは良く知られている. 一方, 二変量極値分布に対するパラメトリック分布族は無限次元となる. 本報告では, 周辺分布が標準指数分布であるような二変量極値分布について考える.

二変量確率変数ベクトル (X,Y) の周辺分布は, 標準指数分布であるとする. また, (X,Y) の同時生存関数を $S(x,y)=\Pr(X>x,Y>y)$ とおく. このとき, (X,Y) が二変量極値分布に従うための必要十分条件は, $A(0)=A(1)=1$ を満たす区間 $[0,1]$ 上の凸関数 A を用いて $S(x,y)$ が

$$S(x,y)=\exp\left\{-(x+y)A\left(\frac{y}{x+y}\right)\right\},\quad x>0,y>0$$

と表現できることである (Pickands 1981). ただし, 関数 A は

$$\max(w,1-w)\le A(w)\le 1,\qquad 0\le w\le 1$$

を満たす. 関数 A は Pickands の従属関数と呼ばれ, 上限 $A(w)\equiv 1$ は, X と Y が独立であることに対応する. 一方, 下限 $A(w)\equiv\max(w,1-w)$ は, X と Y が完全従属であることに対応する.

本報告では, Pickands の従属関数 A のノンパラメトリック推定問題について議論する. A のパラメトリック推定については, Tawn (1988) や Joe (1994) により, 様々なパラメトリックモデルが提案されており, それらもとでの最尤推定量が扱われている. 次節において, 既存のノンパラメトリック推定量を紹介し, それらの推定量のいくつかを含む推定量のクラスを提案する.

2. 従属関数のノンパラメトリック推定量

(X_i,Y_i), $i=1,2,\dots,n$ を上記の二変量極値分布からの無作為標本とする.
Pickands (1981) 推定量

$$\hat{A}_n^{\mathrm{P}}(w)=n\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i(w)\right\}^{-1}.$$

ただし, $\xi_i(w)=\min\{X_i/(1-w),Y_i/w\}$, $i=1,2,\dots,n$.
Deheuvels (1991) 推定量

$$\hat{A}_n^{\mathrm{D}}(w)=n\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i(w)-(1-w)(\bar{X}_n-1)-w(\bar{Y}_n-1)\right\}^{-1}.$$

Tiago de Oliveira (1992) 推定量

$$\hat{A}_n^{\mathrm{T}}(w)=1-\min\left\{\min(w,1-w),\frac{1}{1+\log n}\sum_{i=1}^{n}\min\left(\frac{1-w}{1+nX_i},\frac{w}{1+nY_i}\right)\right\}.$$

Capéraà, Fougères and Gonest (1997) 推定量

$$\hat{A}_n^{\mathrm{CFG}}(w) = \exp\left\{(1-w)\int_0^w \frac{\hat{G}_n(t)-t}{t(1-t)}\,dt - w\int_w^1 \frac{\hat{G}_n(t)-t}{t(1-t)}\,dt.\right\}.$$

ただし, $\hat{G}_n(t) = n^{-1}\sum_{i=1}^n I(Y_i/(X_i+Y_i) \le t)$.

Pickands 推定量は性質 $A(0) = A(1) = 1$ を満たさない．そこで, この点を修正した推定量が Deheuvels 推定量である．これらの推定量はいずれも一致推定量であるが, いずれも凸でない．Tiago de Oliveira 推定量は性質 $A(0) = A(1) = 1$ を満たし, 凸である．この推定量も一致性をもつが, その収束が遅い（$(\log n)^{-2}$ のオーダー）ことが知られている．Capéraà-Fougères-Gonest 推定量は, $Y/(X+Y)$ の分布関数 G と従属関数 A の関係式に着目し, その関係式に G のノンパラメトリック推定量である経験分布関数 $\hat{G}_n$ を差し込んだものである．この推定量は性質 $A(0) = A(1) = 1$ を満たすが, 凸ではない．この点を改良した推定量が, Jiménez *et al* (2001) により提案されている．

本報告では, $\xi(w) = \min\{X/(1-w), Y/w\}$ のべき変換に基づいて, Deheuvels 推定量と Capéraà-Fougères-Gonest 推定量を含む推定量のクラスを導出することを考える．

$\lambda > -1$ を定数とし, $z > 0$ のべき変換を $\psi_\lambda(z) = (z^\lambda - 1)/\lambda$ とおく．このとき,

$$\psi_\lambda\{1/A(w)\} = \{\Gamma(1+\lambda)\}^{-1}\left[E[\psi_\lambda\{\xi(w)\}] - \lambda^{-1}\{\Gamma(1+\lambda)-1\}\right]$$

が成り立つ．この関係式の empirical version として, 推定量 $\hat{A}^*_{\lambda,n}$ を次式で定義する．

$$\psi_\lambda\{1/\hat{A}^*_{\lambda,n}(w)\} = \{\Gamma(1+\lambda)\}^{-1}\left[n^{-1}\sum_{i=1}^n \psi_\lambda\{\xi_i(w)\} - \lambda^{-1}\{\Gamma(1+\lambda)-1\}\right].$$

しかし, この推定量は性質 $A(0) = A(1) = 1$ を満たさない．そこで, この点を修正して, 推定量 $\hat{A}^{**}_{\lambda,n}$ を次式で定義する．

$$\begin{aligned}\psi_\lambda\{1/\hat{A}^{**}_{\lambda,n}(w)\} &= \psi_\lambda\{1/\hat{A}^*_{\lambda,n}(w)\} - (1-w)\psi_\lambda\{1/\hat{A}^*_{\lambda,n}(0)\} - w\psi_\lambda\{1/\hat{A}^*_{\lambda,n}(1)\}\\ &= \{\Gamma(1+\lambda)\}^{-1}n^{-1}\sum_{i=1}^n\left[\psi_\lambda\{\xi_i(w)\} - (1-w)\psi_\lambda(X_i) - w\psi_\lambda(Y_i)\right].\end{aligned}$$

すなわち,

$$\hat{A}^{**}_{\lambda,n}(w) = \left[1 + \frac{\lambda}{n\Gamma(1+\lambda)}\sum_{i=1}^n[\psi_\lambda\{\xi_i(w)\} - (1-w)\psi_\lambda(X_i) - w\psi_\lambda(Y_i)]\right]^{-1/\lambda}$$

である．この推定量は, $\lambda = 1$ のとき Deheuvels 推定量に一致する．また, $\lambda = 0$ のとき Capéraà-Fougères-Gonest 推定量に一致する．

参考文献

Capéraà, P., Fougères, A. L. and Gonest, C. (1997). *Biometrika* **84**, 567-577.

Deheuvels, P. (1991). *Statist. Probab. Lett.* **12**, 257-271.

Jiménez, J. R., Villa-Diharce, E and Flores, M. (2001). *J. Multi. Anal.* bf 76, 159-191.

Joe, H. (1994). *Canad. J. Statist.* **22**, 47-64.

Pickands, J. (1981). *Proc. of the 43rd Session I.S.I.*, Buenos Aires, 859-878.

Tawn, J. A. (1988). *Biometrika* **75**, 397-415.

Tiago de Oliveira, J. (1992). *Commun. Statsit.-Theory Meth.*, **21**, 599-611.