Noncentral Limit Theorems for Bounded Functions of Linear Processes without Finite Mean

一橋大学大学院経済学研究科　本田敏雄

1. はじめに

以下の定常線形過程に関する非中心極限定理と周辺密度関数のカーネル推定量の漸近的性質について講演した。

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \epsilon_{i-j},\ i = 1, 2, \ldots,$$

ここで $\{\epsilon_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ はi.i.d. 過程で，b_j は $b_0 = 1$, $b_j \sim c_0 j^{-\beta}$ とする。$G(x)$ で ϵ_1 の分布関数をあらわし、ϵ_1 は α-安定分布のdomain of attractionに属するとする。まず $0 < \alpha < 2$ かつ $1 < \alpha\beta$ の場合を考える。この場合においては、$K(\cdot)$ が有界な関数であるとき、

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (K(X_i) - \mathrm{E}\{K(X_i)\})$$

の $n \to \infty$ の漸近的性質について、以下の論文で漸近分布が得られている。

a. $0 < \alpha < 2$ and $\alpha\beta > 2$: Hsing (1999) *Ann. Probab.*, Pipiras and Taqqu (2003) *Bernoulli.*

b. $1 < \alpha < 2$, $\beta > 1$, and $\alpha\beta < 2$: Surgailis (2002) *Stochastic Process. Appl.*

c. $1 < \alpha < 2$, $\beta < 1$, and $1 < \alpha\beta$: Koul and Surgailis (2001) *Stochastic Process. Appl.*

aのみ漸近分布が正規分布となる。bとcではそれぞれ安定分布に収束する。しかし部分和過程を見た場合にはそれぞれの挙動は異なり、cでは長期記憶性の影響が顕著に現れる。

本講演では、これまで未解決であった $0 < \alpha < 1$ かつ $1 < \alpha\beta < 2$ のとき、bのときと同様の結果が成立することを報告し、その結果を用いて周辺密度関数の核型推定量の漸近的性質を明らかにした。講演では主として結果、証明の基本的なアイデアのみを述べ、詳細は報告者による同タイトルDiscussion paperに委ねた。

2. 非中心極限定理

$0 < \alpha < 1$ かつ $1 < \alpha\beta < 2$ とする。ここでいくつかの仮定を述べる。ϵ_1 については、α-安定分布の domain of attraction に属するための必要十分条件より、やや制約的な条件を仮定する。

A1: $\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha} G(x) = c_1$、$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}(1 - G(x)) = c_2$、ここで $c_1 + c_2 > 0$ かつ $0 < \alpha < 1$。

A2: $\phi(\theta)$ を ϵ_1 の特性関数とする。その特性関数は，ある正の数 δ，C に対し，$|\phi(\theta)| < C(1 + |\theta|)^{-\delta}$。

以上の二つの仮定に仮定 A3(省略) を加えて、$n^{-1/(\alpha\beta)} S_{[nt]}(t \in [0, 1])$ が $\alpha\beta-$stable Lévy motion に有限次元分布収束することを示すのが定理 2.1 である。$D[0, 1]$ での収束については未解決であるが、証明はやや困難であると予想される。ϵ_1 が α-安定分布なら A3 は成立することに注意する。

さらに $K(\cdot)$ が有界かつ積分可能な関数ならば、仮定 A3 は不要であることを述べているのが定理 2.2 である。

3. 核型密度関数推定量

定理 2.2 の結果を若干修正すると、仮定 A1、A2 のみで X_1 の x での密度関数 $f(x)$ のカーネル推定量について、

$$\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\Big(K\Big(\frac{X_i - x}{h}\Big) - \mathrm{E}\Big\{K\Big(\frac{X_i - x}{h}\Big)\Big\}\Big)$$

の漸近分布も導くことができる。ここで $K(\cdot)$ は $\int \xi^2 K(\xi) d\xi < \infty$ を満たす有界かつ対称な密度関数である。h はバンド幅で、$h = c_3 n^{-\gamma}$ である。カーネル推定量の漸近分布は γ と $\alpha\beta$ の関係により決まる。$\alpha\beta$ が大きめのときは i.i.d. の場合と同じ漸近分布をもち、そうでないときの漸近分布は $\alpha\beta$-安定分布となることを報告した。同様の現象は長期記憶線形過程の場合にも見られる。