Power properties of empirical likelihood for stationary processes

早稲田大学基幹理工学部　玉置 健一郎

ここでは、経験尤度を含む CR 型統計量を時系列解析に応用することを考える。従属データに対して、Monti (1997) は、Whittle 尤度の微分に対して経験尤度を用いて母数の推定等を行った。また、近年 Nordman and Lahiri (2006) は、短期および長期記憶課程に対して周波数領域での経験尤度の漸近的な性質を明らかにした。

今回の報告では、短期記憶課程に対する周波数領域での CR 型統計量の検出力の漸近展開を与え、その比較等を行う。まず、観測系列 $X_1, \ldots, X_n$ に基づいて、$\theta = (\theta^1, \ldots \theta^p)' \in \Theta \subset \mathbf{R}^p$ を推定することを考える。 また、θ に関して"general estimating equations"が与えられているとする。つまり、$G_\theta(\lambda) = (g_{1,\theta}(\lambda), \ldots, g_{p,\theta}(\lambda))'$ とすると、G_θ は次の"spectral moment condition"を満たす。

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_{\theta_0}(\lambda) f(\lambda) d\lambda = 0, \tag{1}$$

ここに、θ_0 は θ の真値で、$f(\lambda)$ は $\{X_t\}$ の spectral density とする。

例 1. ラグ m (> 0) の自己相関係数 $\rho(m) = \gamma(m)/\gamma(0)$ を推定することを考える。つまり、$\theta_0 = \rho(m)$ とする。このとき、$G_\theta(\lambda) = (e^{im\lambda} + e^{-im\lambda})/2 - \theta$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_{\theta_0}(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \gamma(m) - \theta_0 \gamma(0) = 0$$

より、(1) を満たすことが分かる。

例 2. 時系列解析では、Whittle 尤度がよく用いられる。つまり、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(\lambda)^{-1} \right\} f(\lambda) d\lambda = 0$$

を満たす θ を推定する。このとき、

$$G_\theta(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\theta} f_\theta(\lambda)^{-1}$$

とすれば (1) を満たす。

次に、周波数領域でのバイアス補正を行った CR 型統計量を以下で定義する。

$$\begin{aligned} R_\nu(\theta) = \min_{p_j} \Bigg[\frac{2}{\nu(\nu+1)} \sum_{j=1}^{n} \left\{ (np_j)^{-\nu} - 1 \right\} \Bigg| \sum_{j=1}^{n} p_j = 1,\ p_j \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} p_j G_\theta(\lambda_j) \left\{ I_n(\lambda_j) + \frac{1}{n} \hat{b}(\lambda_j) \right\} = 0 \Bigg], \end{aligned} \tag{2}$$

ここに、$\lambda_j = 2\pi j/n$、$I_n(\lambda) = (2\pi n)^{-1}|\sum_{t=1}^{n} X_t \exp(it\lambda)|^2$、$\hat{b}(\lambda)/n$ は $E[I_n(\lambda)]$ のバイアス補正項である。

ラグランジュの未定乗数法より、$\nu \neq -1$ のとき、

$$R_\nu(\theta) = \frac{2n}{\nu(\nu+1)} C_1(\theta),$$

で与えられる。ここに、

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{1 + C_1(\theta) + C_2(\theta)' m_j(\theta)\right\}^{\frac{-1}{\nu+1}} = n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} m_j(\theta) \left\{1 + C_1(\theta) + C_2(\theta)' m_j(\theta)\right\}^{\frac{-1}{\nu+1}} = 0,$$
$$m_j(\theta) = G_\theta(\lambda_j) \left\{ I_n(\lambda_j) + \frac{1}{n} \hat{b}(\lambda_j) \right\}.$$

$\nu = -1$ の場合も、同様にラグランジュの未定乗数法より求めることが出来る。

検定統計量 $R_\nu(\theta_0)$ の検出力を求めるために、$\theta = \theta_0 + n^{-1/2} h$ のもとでの検定統計量の漸近展開を考える。それを用いて、検出力の漸近展開を得る。$\chi_{p,\Delta}(z)$ を自由度 p で非心度 Δ の非心 χ^2 の分布関数とする。このとき、次が成り立つ。

定理 1. $\theta = \theta_0 + n^{-1/2} h$ の下で $R_\nu(\theta_0)$ の分布関数は次のように漸近展開できる。

$$P_{\theta_0 + n^{-1/2} h}[R_\nu(\theta_0) < z] = \chi_{p,\Delta}(z) + n^{-1/2} \sum_{j=0}^{3} m_j \chi_{p+2j,\Delta}(z) + o(n^{-1/2}),$$

ここに、 非心度は $\Delta = W^{ij} A_{i,a} A_{j,b} h^a h^b$ で、$\{W^{ij}\}$ は $\{W_{ij}\}$ の逆行列、

$$W_{ij}(\theta) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{i,\theta}(\lambda) g_{j,\theta}(\lambda) f(\lambda)^2 d\lambda,$$
$$A_{i,a}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\partial_a g_{i,\theta}(\lambda)\} f(\lambda) d\lambda,$$

$\partial_a = \partial / \partial \theta^a$ であり、また、m_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ は $g_{i,\theta}(\lambda)$ や $f(\lambda)$ であらわされる。

定理 1 の結果より、CR 型統計量の 2 次の検出力比較を行うことができる。

定理 2. (2) で与えられた周波数領域でのバイアス補正を行った CR 型検定統計量のクラスを考える。このとき $\nu = 2/3$ の CR 型検定統計量が"local maximinity"の意味で最適である。

References

[1] Monti, A.C. (1997). Empirical likelihood confidence regions in time series models. *Biometrika* **84**, 395–405.

[2] Nordman, D.J. and Lahiri, S.N. (2006). A frequency domain empirical likelihood for short- and long-range dependence. *Ann. Statist.* **34**, 3019–3050.