PORTMANTEAU LIKELIHOOD RATIO TESTS FOR MODEL SELECTION

BY NAOYA KATAYAMA *

概要. 本発表では，DGP が i.i.d. であるとき，様々なモデルをあてはめ，そのモデルのよさを検定する問題を議論する．具体的には，Vuong (1989, Econometrica, 57, 307-333) による Kullback-Leibler Information Criterion (KLIC) の観点で良いモデルかどうかを調べる検定問題を複合仮説へ拡張する．ここで候補となるモデルは真のモデルを識別していることを仮定しない．まず尤度比 (LR) 統計量の同時分布の漸近性質を調べる．次に，帰無仮説：「全てのモデルが KLIC の観点で同等である」，対立仮説：「少なくとも 1 つ KLIC の観点で優れるモデルが存在する」の検定問題を考え，LR 統計量の（二乗）和によるかばん検定統計量を提案する．この検定は，任意の m 個からなるモデルの集合（partially nested, strictly nonnested, or overlapping models）で実行可能で，多重検定による多重数値積分を行う必要のない簡易な検定となっている．また情報量規準（IC）を LR 統計量の代わりに用いた場合の結果も紹介する．結果として，モデルの関数と説明変数の候補が多数あり，その中のいくつかのモデルが似通った IC の値を示すとき，それらが KLIC の意味で同等かどうかを調べることができる．

KEYWORDS. Likelihood ratio tests; model selection; portmanteau tests; generalized likelihood ratio tests; goodness-of-fit; information criterion.

主要結果の概要

観測系列ベクトル $X_t = (Y_t', Z_t')'$ が i.i.d. であるとき，Z_t を条件付とする密度よりモデルを構築する．競合するモデルの候補が m 個あるとする．これらモデルを $F_i, i = 1, 2, \ldots, m$ とする．またパラメータの次数を p_i とし，$p_i \leq p_{i+1}$ とする．このとき，F_i と F_j の尤度比を

$$LR_n(i, j) = \sum_{t=1}^{n} \log \frac{f_j(Y_t|Z_t; \widehat{\theta}_{jn})}{f_i(Y_t|Z_t; \widehat{\theta}_{in})}$$

for $i < j$，対応する F_i と F_j の KLIC の相対的距離を

$$E^*(i, j) = E\left[\log f_j(Y_t|Z_t; \theta_j^*)\right] - \mathrm{E}\left[f_i(Y_t|Z_t; \theta_i^*)\right]$$

とする．θ_i^* と θ_j^* はモデル F_i と F_j の母数空間での pseudo-true value で，$\widehat{\theta}_{in}$ と $\widehat{\theta}_{jn}$ は対応する擬似最尤推定量である．本稿で考える検定問題は，

$$H_0: \ E^*(1,2) = E^*(1,3) = \cdots = E^*(1,m) = 0 \text{ vs } H_A : H_0^c.$$

*Faculty of Economics, Kyushu University, 6-19-1, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812-8581, Japan. E-Mail: kata@kyudai.jp

であるが，H_0 の部分集合である次の H_0^ω：

$$H_0^\omega: \ f_1(\cdot|\cdot;\theta_1^*) = f_i(\cdot|\cdot;\theta_i^*),\ i=2,3,\ldots,m \text{ vs } H_A^\omega : H_0^{\omega c}.$$

も考える．Vuong (1989) より尤度比 $LR_n(1,i)$ の漸近分布は，$f_1(\cdot|\cdot;\theta_1^*) = f_i(\cdot|\cdot;\theta_i^*)$ の場合と等号が成立しない場合とで収束のオーダーが異なり分布も異なる：$f_1(\cdot|\cdot;\theta_1^*) = f_i(\cdot|\cdot;\theta_i^*)$ のときは，$LR_n(1,i)$ は漸近的にある正規ベクトルの 2 次形式の分布に従うが，等号が成立しないときは，$LR_n(1,i)$ は H_0 下で $\sqrt{n}$ オーダーで漸近的に正規分布に従う．

Vuong (1989) は $m=2$ の場合を考えたが，本発表では一般の $m \geq 2$ の場合を考えている．収束オーダーが異なることから，逐次尤度比検定を行ったのでは，場合わけが複雑となり，高次の多重積分が要求されるため現実的ではない．そこで，これら問題を解決するかばん検定タイプの尤度比検定を考える．場合わけはわずか 3 通りで次のように行う：

1. 全てのモデルが nest されている場合 ($F_i \subset F_{i+1}$)：

$$SLR_{mn} \equiv 2\sum_{i=2}^{m} LR_n(1,i)$$

   が H_0 下で漸近的にある正規ベクトルの 2 次形式の分布に従うことより検定を行う．

2. 少なくとも 1 つのモデルの組が strictly nonnested ($F_i \cap F_j = \phi$ for some $i \neq j$) であるとき，

$$SSLR_{mn} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{m} LR_n^2(1,i)$$

   が H_0 下で漸近的にある正規ベクトルの 2 次形式の分布に従うことより検定を行う．

3. 1,2 のいずれにも当てはまらないケース（some models are nested and some are overlapping）：2 段階で検定を行う．

   (a) まず最初に

$$SV_{mn} \equiv n\sum_{i=2}^{m} \widehat{\omega}_n^2(1,i).$$

   を用いて，H_0^ω を検定する．SV_{mn} は，尤度比が $\sqrt{n}$ オーダーで正規分布に収束する場合の漸近分散の対角成分の和の推定量を n 倍した統計量である．H_0^ω 下で漸近的にある正規ベクトルの 2 次形式の分布に従うことより検定を行う．これにより H_0^ω が棄却されない場合は H_0 も棄却しない．

   (b) H_0^ω が棄却された場合は，先の $SSLR_{mn}$ が $H_0 - H_0^\omega$ 下で漸近的にある正規ベクトルの 2 次形式の分布に従うことより検定を行う．$H_0 - H_0^\omega$ が棄却されないときは H_0 を棄却しない．$H_0 - H_0^\omega$ が棄却されるときは H_0 を棄却する．

   H_0^ω の検定の有意水準を α_1，$H_0 - H_0^\omega$ の検定の有意水準を α_2 とすると，この 2 段階の検定の有意水準は高々$\max(\alpha_1, \alpha_2)$ である．

これら漸近分布の確率計算には Imhof の公式を用いる．