Statistical Estimation of Optimal Portfolios depending on Higher Order Cumulants

白石 博（早稲田大学 基幹理工学部）
谷口 正信（早稲田大学 基幹理工学部）

時間 t における p 個の資産のランダムなリターンを $X(t) = (X_1(t), \dots, X_p(t))'$ とし、定常性を仮定して、その 1 次および 2 次キュムラントをそれぞれ

$$
\begin{aligned}
c^{a_1} &= \{cum(X_{a_1}(t))\}_{a_1=1,\dots,p} \\
c^{a_2a_3} &= \{cum(X_{a_2}(t), X_{a_3}(t))\}_{a_2,a_3=1,\dots,p,a_2\le a_3}
\end{aligned}
$$

とする。また、portfolio weight を α_0 および $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)'$ で表す。このとき、今までの報告者達の論文では、代表的な utility 関数に対する optimal portfolio weight は、統一的に

$$g(c^{a_1}, c^{a_2a_3})$$

で表されるとしてきた。ここに、$g : \mathbf{R}^{p+q} \to \mathbf{R}^p$ $(q = p(p+1)/2)$ なる関数。しかし、経験データを見ると非正規であり、portfolio は 2 次までのモーメントだけではなく、3 次以上のモーメントの影響も受けることが知られている。したがって、本報告では 3 次キュムラントを

$$c^{a_4a_5a_6} = \{cum(X_{a_4}(t), X_{a_5}(t), X_{a_6}(t))\}_{a_4,a_5,a_6=1,\dots,p,a_4\le a_5\le a_6}$$

とおき、optimal portfolio weight が

$$g(c^{a_1}, c^{a_2a_3}, c^{a_4a_5a_6})$$

で表されると仮定する。ここに、$g : \mathbf{R}^{p+q+r} \to \mathbf{R}^p$ $(r = p(p+1)(p+2)/6)$ なる関数。この設定の下で、$g(c^{a_1}, c^{a_2a_3}, c^{a_4a_5a_6})$ の推定量を提案し、その漸近的性質を報告した。

以下、$\{X(t) = (X_1(t), \dots, X_p(t))'; t \in \mathbf{Z}\}$ は p-vector non-Gaussian linear process で、次の表現を持つとする。

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} G(j)\epsilon(t-j) + \mu,\ t \in \mathbf{Z}$$

ここで、$\{G(j)\}$ は $l^1 - summable$ とし、$\{\epsilon(t)\}$ は無相関過程で全てのオーダーのキュムラントを持つとする。

今、$X(1), \ldots, X(n)$ が観察されているとして、$\theta = (c^{a_1}, c^{a_2a_3}, c^{a_4a_5a_6})'$ の推定量として次のものを用いる。

$$
\begin{aligned}
\hat{c}^{a_1} &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} X_{a_1}(s) \right\}_{a_1=1,\ldots,p} \\
\hat{c}^{a_2a_3} &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} (X_{a_2}(s) - \hat{c}_{a_2})(X_{a_3}(s) - \hat{c}_{a_3}) \right\}_{a_2,a_3=1,\ldots,p,a_2 \le a_3} \\
\hat{c}^{a_4a_5a_6} &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} (X_{a_4}(s) - \hat{c}_{a_4})(X_{a_5}(s) - \hat{c}_{a_5})(X_{a_6}(s) - \hat{c}_{a_6}) \right\}_{a_4,a_5,a_6=1,\ldots,p,a_4 \le a_5 \le a_6} \\
\hat{\theta} &= (\hat{c}^{a_1}, \hat{c}^{a_2a_3}, \hat{c}^{a_4a_5a_6})'
\end{aligned}
$$

この $\hat{\theta}$ に対して $g(\theta)$ の推定量を $g(\hat{\theta})$ とする。関数 $g(\cdot)$ に対する滑らかさの仮定と $\{X(t)\}$ に対する自然な正則条件の下で、optimal portfolio 推定量 $g(\hat{\theta})$ に対する漸近分布を導くことができる。

Theorem 1.

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(\mathbf{0}, \left(\frac{\partial g}{\partial \theta'}\right) \Omega_{NG} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\right)$$

ここで、Ω_{NG} は、$(p+q+r) \times (p+q+r)$-行列であり、6 次までのキュムラントスペクトルで表現できる。

次に、$\{X(t)\}$ が p-dimensional non-Gaussian stationary process であるが、Gaussian process に近接しているとする。特に 3 次キュムラントが

$$\hat{c}^{a_4a_5a_6} = \frac{1}{\sqrt{n}} h^{a_4a_5a_6}$$

の型の近接性を持っているとき、従来の 3 次キュムラントを考慮しない推定量 $\check{g} = g(\hat{c}^{a_1}, \hat{c}^{a_2a_3})$ と、ここでの推定量 $\hat{g} = g(\hat{c}^{a_1}, \hat{c}^{a_2a_3}, \hat{c}^{a_4a_5a_6})$ の漸近平均二乗誤差を評価した。また、それらの差異の数値比較を行った結果、3 次キュムラントの大きさにより、有効な推定量が異なることが解った。最後に、実際の株価データを使って今回提案する推定量が有効であることを報告した。