On adjustments of Rao's test for the multiparameter case

柿沢佳秀　北海道大学大学院経済学研究科

1　はじめに

LR 統計量はバートレット補正可能であることが知られているが, Wald 統計量, Rao 統計量 (別名 Lagrange-multiplier (LM) 統計量) など多くの統計量は一般的にバートレット補正可能ではない. 実際, 帰無分布のカイ 2 乗型の漸近展開はしばしば $P(S \le x) = G_f(x) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{k} \pi_\ell G_{f+2\ell}(x) + \mathrm{o}(n^{-1})$ の形をするが, LR 統計量のようにバートレット補正可能である統計量 S は $k=1$ の場合である. $k \neq 1$ に対しては定数補正では n^{-1} の項を消すことはできないが, 多項式の補正統計量 $S^{CF} = S(1-\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k} \widehat{c}_\ell S^{\ell-1})$ により $P(S^{CF} \le x) = G_f(x) + \mathrm{o}(n^{-1})$ とできるような係数 $c_1, \ldots, c_k$ が $\pi_0, \pi_0+\pi_1, \ldots, \sum_{\ell=0}^{k-1}\pi_\ell$ から唯一定まることを Cordeiro and Ferrari (1991; Biometrika) が示し, Kakizawa (1996; Biometrika) はさらに単調な多項式による補正統計量 S^{mon} を考察した.

ところで, Cordeiro and Ferrari (1991) と同じ時期に Chandra and Mukerjee (1991; JMA) と Taniguchi (1991a, b; Springer, JMA; 正規 ARMA モデルを念頭にした一般漸近理論であり, 同じ手法は IID モデルでも議論される) は $p=1$ の場合に補正統計量の提案をした. ここでの補正とは, 与えられた漸近カイ 2 乗型の検定統計量に対し (i) 対数尤度微分の情報 (ii) 最尤推定量の情報を取り入れることから, 帰無分布の漸近展開の n^{-1} 項を消失させることを意味する. 本報告の目的は後者の Taniguchi (1991a, b) のアプローチを $p>1$ なる単純帰無仮説の場合に拡張することである. Chandra and Mukerjee (1991) は最終節にて多母数の場合に Rao 統計量のみを考察しているが, 彼らとは違う補正統計量が存在することも指摘する.

本報告は途中経過報告であり, 進展がみられたら別の機会に報告したいと思う.

2　記号

d-次元の密度関数モデル $\mathcal{P} = \{f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbf{R}^p\}$ の対数尤度関数を $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(\mathbf{x}_i;\boldsymbol{\theta})$ とし, 単純帰無仮説 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ を検定したい. $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^p)'$ に関して微分可能な任意の関数 $\Psi(\boldsymbol{\theta})$ の s 階の偏微分を $\Psi_{j_1 \ldots j_s}(\boldsymbol{\theta}) = (\partial/\partial\theta^{j_1}) \cdots (\partial/\partial\theta^{j_s})\Psi(\boldsymbol{\theta})$ と書き, 以下 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ で評価されたとき, $\boldsymbol{\theta}_0$ は省略する. $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ の微分 $\ell_{j_{11}\ldots j_{1R_1}}, \ldots, \ell_{j_{\nu 1}\ldots j_{\nu R_\nu}}$ の積の (帰無仮説の下での) 期待値を

$$\mu_{j_{11}\ldots j_{1R_1}, \ldots, j_{11}\ldots j_{\nu R_\nu}} = E\Big[\prod_{i=1}^{\nu} \ell_{j_{i1}\ldots j_{iR_i}}\Big] \quad (\text{一般性を失うことなく } R_1 \ge R_2 \ge \cdots \ge R_\nu)$$

と書く. 微積分の順序交換可能な条件下で $\mu_{j_1} = E[\ell_{j_1}] = 0$ となるが, これをさらに繰り返し微分して, いわゆる Bartlett identity が成り立つ; n^{-1} の漸近理論では $\mu_{j_1 j_2} + \mu_{j_1, j_2} = 0$, $\mu_{j_1 j_2 j_3} + \langle 3 \rangle \mu_{j_1 j_2, j_3} + \mu_{j_1, j_2, j_3} = 0$, $\mu_{j_1 j_2 j_3 j_4} + \langle 4 \rangle \mu_{j_1 j_2 j_3, j_4} + \langle 3 \rangle \mu_{j_1 j_2, j_3 j_4} + \langle 6 \rangle \mu_{j_1 j_2, j_3, j_4} + \mu_{j_1, j_2, j_3, j_4} = 0$ に注意する. $p \times p$ 行列 $(\mu_{j_1, j_2})_{j_1, j_2 = 1, \ldots, p}$ の対称な square-root matrix (一意に定まらない) を 1 つ固定し, それを $(i_{j_1, j_2})_{j_1, j_2 = 1, \ldots, p}$ とおく. このとき, 逆行列 $\{(i_{j_1, j_2})_{j_1, j_2 = 1, \ldots, p}\}^{-1}$ を $(i^{j_1, j_2})_{j_1, j_2 = 1, \ldots, p}$ と書く. そして, Einstein の表記法に従い

$$\mu_{(j_{11}\ldots j_{1R_1}, \ldots, j_{11}\ldots j_{\nu R_\nu})} = \Big(\prod_{k=1}^{\nu}\prod_{r=1}^{R_k} i^{j_{kr}, j'_{kr}}\Big) \mu_{j'_{11}\ldots j'_{1R_1}, \ldots, j'_{11}\ldots j'_{\nu R_\nu}}$$

を定義する. さらに, s 階の対数尤度微分の規準化された基本統計量を

$$Z_{(j_1 \ldots j_s)} = \frac{1}{n^{1/2}} i^{j_1, j'_1} \cdots i^{j_s, j'_s} (\mathcal{L}_{j'_1 \ldots j'_s} - n\mu_{j'_1 \ldots j'_s})$$

とおく.

3　$p > 1$ で単純帰無仮説の場合の２次検出力について

帰無仮説 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ に対する (LR 統計量, Rao 統計量, Wald 統計量を含む) 検定統計量のクラス $S^{\Gamma} = \mathcal{U}_a^{\Gamma}\mathcal{U}_a^{\Gamma} + \mathrm{o}_p(n^{-1/2})$ を考える．ここに, $\mathcal{U}_a^{\Gamma} = Z_{(a)} + n^{-1/2}(\gamma^{[1]}Z_{(ab)}Z_{(b)} + \Gamma_{abc}^{[2]}Z_{(b)}Z_{(c)})$ の特別な場合である Rao 統計量は $\gamma^{[1]} = \Gamma_{abc}^{[2]} = 0$ に対応する．本報告の１つの結果として Taniguchi (1991a, b) の多次元版を示した．すなわち, 統計量 $S^C = \mathcal{U}_a^C\mathcal{U}_a^C + \mathrm{o}_p(n^{-1/2})$ が与えられたとき, 局所対立仮説 $A : \theta_n^a = \theta_0^a + n^{-1/2}i^{a,a'}\varepsilon_{a'}$ の下でのキュムラント $cum_{a_1}^{*C} = \varepsilon_{a_1} + \frac{1}{n^{1/2}}\,\kappa_{a_1}^{*C} + \mathrm{o}(n^{-1/2})$, $cum_{a_1,a_2}^{*C} = \delta_{a_1a_2} + \frac{1}{n^{1/2}}\,\kappa_{a_1,a_2}^{*C} + \mathrm{o}(n^{-1/2})$, $cum_{a_1,a_2,a_3}^{*C} = \frac{1}{n^{1/2}}\,\kappa_{a_1,a_2,a_3}^{*C} + \mathrm{o}(n^{-1/2})$ について, もし $k_{a_1,a_2,a_3}^{*C} = 0$ ならば

$$P_A[\mathcal{U}_a^{C(1)}\mathcal{U}_a^{C(1)} > x] = 1 - G_p(x;\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{n^{1/2}}\sum_{\ell=0}^{2}\pi_{1/2,\ell}^{\varepsilon}G_{p+2\ell}(x;\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathrm{o}(n^{-1/2})\,.$$

ここに, $\pi_{1/2,\ell}^{\varepsilon}$ は $c^{[1]}$, $C_{abc}^{[2]}$ に依存しない $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_a)_{a=1,\dots,p}$ の３次の斉次多項式である．一般に $\mathcal{U}_a^{\Gamma}$ の３次キュムラントは $\mathrm{O}(n^{-1/2})$ であるが, 次節の ($\mathrm{O}_p(n^{-1/2})$ までの) 方法で統計量を修正すれば, ３次キュムラントは $\mathrm{o}(n^{-1/2})$ となり, 修正統計量の２次の検出力は同じになることが示された.

4　$p > 1$ で単純帰無仮説の場合の統計量のバートレット型補正について (途中経過報告)

バートレット型補正は n^{-1} の漸近理論だから, 前節のクラスを $S = \mathcal{U}_a\mathcal{U}_a + \mathrm{o}_p(n^{-1})$ に拡張する．ここに, $\mathcal{U}_a = Z_{(a)} + n^{-1/2}\mathcal{U}_a^{(1)} + n^{-1}\mathcal{U}_a^{(2)}$,

$$\mathcal{U}_a^{(1)} = \gamma^{[1]}Z_{(ab)}Z_{(b)} + \Gamma_{abc}^{[2]}Z_{(b)}Z_{(c)}\,,$$

$$\mathcal{U}_a^{(2)} = \gamma^{[3]}Z_{(ab)}Z_{(bc)}Z_{(c)} + \Gamma_{bcd}^{[4]}Z_{(ab)}Z_{(c)}Z_{(d)} + \Gamma_{abc}^{[5]}Z_{(bd)}Z_{(d)}Z_{(c)} + \Gamma_{abcd}^{[6]}Z_{(b)}Z_{(c)}Z_{(d)} + \gamma^{[7]}Z_{(abc)}Z_{(b)}Z_{(c)}$$

の特別な場合である Rao 統計量は $\gamma^{[1]} = \Gamma_{abc}^{[2]} = \gamma^{[3]} = \Gamma_{bcd}^{[4]} = \Gamma_{abc}^{[5]} = \Gamma_{abcd}^{[6]} = \gamma^{[7]} = 0$ に対応する．Taniguchi (1991b) の方法によれば最尤推定量の適当なスカラー関数 $\widetilde{h}$ を統計量 S に乗じてバートレット補正可能な統計量を導くのだが, $p > 1$ の場合には必ずしもバートレット補正可能ではないという否定的な結果が示された．そこで, 最尤推定量の適当な行列関数 $H(\cdot)$ を導入することを提案する．すなわち, $H(\cdot)$ の (a, b) 要素を $H_{ab}(\cdot)$ とおくとき $S^{\dagger T} = \{H_{aa'_1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})\mathcal{U}_{a'_1}\}\{H_{aa'_2}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})\mathcal{U}_{a'_2}\}$ の確率展開と漸近展開を計算して, $(S^{\dagger T})^{\star} = (1+\rho/n)S^{\dagger T}$ について $P[(S^{\dagger T})^{\star} \le x] = G_p(x) + \mathrm{o}(n^{-1})$ となるような定数 ρ とスカラー関数 H_{ab} (ただし $H_{ab}(\boldsymbol{\theta}_0) = \delta_{ab}$) の微係数 $H_{ab,j} = H_{ab,j}(\boldsymbol{\theta}_0), H_{ab,jk} = H_{ab,jk}(\boldsymbol{\theta}_0)$ を定める．実際, 微係数 $H_{aa',j}, H_{aa',jk}$ は $\mathcal{U}_a^{\dagger T} = H_{aa'}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{ML})\mathcal{U}_{a'}$ の３・４次キュムラントが $\mathrm{o}(n^{-1})$ となるように選ばれることができる.

注意. (1) 多母数で Rao 統計量に対してのみ提案された Chandra-Mukerjee (1991) 法は統計量 $S = \mathcal{U}_a\mathcal{U}_a + \mathrm{o}_p(n^{-1})$ へも応用される:

$$S^{CM} = \mathcal{U}_a^{CM}\mathcal{U}_a^{CM}\,,\quad \mathcal{U}_a^{CM} = \mathcal{U}_a + \frac{1}{n^{1/2}}\,M_{abc}Z_{(b)}Z_{(c)} + \frac{1}{n}\,(M_{ab}Z_{(b)} + M_{abcd}Z_{(b)}Z_{(c)}Z_{(d)})$$

及び

$$(S^{\dagger CM})^{\star} = \Big(1 + \frac{\rho}{n}\Big)\mathcal{U}_a^{\dagger CM}\mathcal{U}_a^{\dagger CM}\,,\quad \mathcal{U}_a^{\dagger CM} = \mathcal{U}_a + \frac{1}{n^{1/2}}\,M_{abc}Z_{(b)}Z_{(c)} + \frac{1}{n}\,M_{abcd}Z_{(b)}Z_{(c)}Z_{(d)}$$

(後者は, Chandra-Mukerjee (1991) の M_{ab} の決め方に対する任意性をふまえ, 報告者が指摘した修正である) について $P[S^{CM} \le x], P[(S^{\dagger CM})^{\star} \le x] = G_p(x) + \mathrm{o}(n^{-1})$ となるような定数 $M_{ab}, M_{abc}, M_{abcd}, \rho$ が存在する．実際, M_{abc}, M_{abcd} は $\mathcal{U}_a^{CM}$ または $\mathcal{U}_a^{\dagger CM}$ の３・４次キュムラントが $\mathrm{o}(n^{-1})$ となるように選ばれることができる.

(2) (1) の修正項で $Z_{(j)}$ の代わりに $\mathcal{U}_j$ を用いることもできる.