Resampling Procedure in Estimation of Optimal Portfolios for VAR(p) Returns of Assets

白石 博（早稲田大学 基幹理工学部）

時間 t における m 個の資産のランダムなリターンを $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_m(t))'$ とし、定常性を仮定して、その期待値および分散共分散行列をそれぞれ $\boldsymbol{\mu} = E\{\mathbf{X}(t)\}$、$\Sigma = Cov(\mathbf{X}(t))$ とする。また、portfolio weight を $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)'$ で表す。このとき、過去、種々の基準から optimal portfolio weight が提案されたが、これらは統一的な形

$$g(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$$

で表される。ここに、$g : \mathbf{R}^{m+m(m+1)/2} \to \mathbf{R}^{m-1}$ なる関数。

過去の研究では、リターンが定常過程または非定常過程に従うと仮定して optimal portfolio weight $g = g(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ の漸近最適推定について考えてきた。その結果、推定量 $\hat{g} = g(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\Sigma})$ の漸近分散がリターンのスペクトル密度関数で表現できることが分かったが、その漸近分散は非常に複雑であり、$\hat{g}$ の漸近分布に基づく信頼区間等は求めにくい。

本研究では、上記の問題点をリサンプリング法を使って解決する。リサンプリングを使えば、$\hat{g}$ の漸近分布を推定しなくてもポートフォリオ推定量の経験分布を作ることができるため、容易に信頼区間等が構成できる。一方で、リサンプリングは従属過程に対しては一般には適用できないが、$AR(p)$ 過程に対しては誤差の推定量をサンプリングすることによって適用可能であることが知られている (Bose(1988) 等)。したがって、収益率過程が $AR(p)$ 過程に従う場合に、ポートフォリオ推定量の漸近分布をリサンプリングを使って評価する。

$\{\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_m(t))'; t \in \boldsymbol{Z}\}$ は m-vector $AR(p)$ 過程に従うとする。

$$\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{p} G(j)\{\boldsymbol{X}(t-j) - \boldsymbol{\mu}\} + \boldsymbol{\epsilon}(t),$$

ここに $\boldsymbol{\epsilon}(t) = (\epsilon_1(t), \ldots, \epsilon_m(t))' \sim i.i.d.(\mathbf{0}, K)$ とする。

今、$\boldsymbol{X}(1-p), \ldots, \boldsymbol{X}(n)$ を $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ の観測列とする。このとき、$G = (G(1)', \ldots, G(p)')'$

の最小二乗推定量 $\hat{G}$ および $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{X}(t)$ を使って、誤差推定量

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}} - \sum_{j=1}^{p} \hat{G}(j)\{\boldsymbol{X}(t-j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}\} \quad t = 1, \ldots, n.$$

が構成できる。さらに、$G_n(\cdot)$ を各 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(t)$ で大きさ $1/n$ をとる経験分布関数とし、G_n から、リサンプリング誤差 $\{\boldsymbol{\epsilon}^*(t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\}$ を無作為抽出する。これを使って次のリサンプリング収益率 $\boldsymbol{X}^*(t)$ が生成される。

$$\boldsymbol{X}^*(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{j=1}^{p} \hat{G}(j)\{\boldsymbol{X}^*(t-j) - \hat{\boldsymbol{\mu}}\} + \boldsymbol{\epsilon}^*(t) \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

$\boldsymbol{X}^*(1), \ldots, \boldsymbol{X}^*(n)$ から構成される推定量を

$$\boldsymbol{\theta}^* = (\boldsymbol{\mu}^{*\prime}, vech\{\Sigma^*\}')', \quad \boldsymbol{\mu}^* = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{X}^*(t), \quad \Sigma^* = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \{\boldsymbol{X}^*(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}}\}\{\boldsymbol{X}^*(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}}\}'$$

とする。また、$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\{\boldsymbol{X}(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}}\}\{\boldsymbol{X}(t) - \hat{\boldsymbol{\mu}}\}'$ として、

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}', vech\{\Sigma\}')' \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', vech\{\hat{\Sigma}\}')'$$

とする。このとき、適当な正則条件の下、次の 2 つの定理が成り立つ。

Theorem 1.

$$\sup_{C \in \boldsymbol{\mathcal{B}}^{m+r}} \left| P^*\left(\sqrt{n}(\boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \in C\right) - P\left(\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \in C\right) \right| = o(1), \quad a.s.$$

ここで、$r = m(m+1)/2$ とする。

Theorem 2.

$$(i) \quad \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \left| P^*\left(\sqrt{n}|\hat{\boldsymbol{\mu}}' g(\boldsymbol{\theta}^*) - \hat{\boldsymbol{\mu}}' g(\hat{\boldsymbol{\theta}})| < x\right) - P\left(\sqrt{n}|\boldsymbol{\mu}' g(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \boldsymbol{\mu}' g(\boldsymbol{\theta})| < x\right) \right| = o(1), \quad a.s.$$

$$(ii) \quad \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \left| P^*\left(\sqrt{n}\left|\sqrt{g(\boldsymbol{\theta}^*)'\hat{\Sigma}g(\boldsymbol{\theta}^*)} - \sqrt{g(\hat{\boldsymbol{\theta}})'\hat{\Sigma}g(\hat{\boldsymbol{\theta}})}\right| < x\right) - P\left(\sqrt{n}\left|\sqrt{g(\hat{\boldsymbol{\theta}})'\Sigma g(\hat{\boldsymbol{\theta}})} - \sqrt{g(\boldsymbol{\theta})'\Sigma g(\boldsymbol{\theta})}\right| < x\right) \right| = o(1), \quad a.s.$$

Theorem 2. の $\mu_P = \boldsymbol{\mu}' g(\boldsymbol{\theta})$ は、ポートフォリオの期待リターンを表し、$\sigma_P = \sqrt{g(\boldsymbol{\theta})'\Sigma g(\boldsymbol{\theta})}$ は、ポートフォリオリスクを表している。数値例として、具体的なモデルを使って、μ_P, σ_P の推定量 $\hat{\mu}_P, \hat{\sigma}_P$ に対する信頼区間を構成する。$GARCH(p,q)$ 過程に従っている場合の結果も得ることが出来た。