不変検定について

国際数理科学協会　長尾壽夫

Lehmann(1959) ”Testing statistical hypotheses (John-Wiley)”で, 仮説検定の invariance 検定を取り扱っている. 種々の問題を取り扱っているが，その目的の一つは一様最強力不変検定を如何に求めるかである. 先ずデータ $\mathcal{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ があり, その分布を $\mathrm{P}_\theta(\cdot)$ とする．$\mathcal{X}$ 上に群 G を考える. 母数空間上に導出される群 $\bar{G}$ が仮説を不変にするとする. Lehmann は最初, 十分統計量 T を用いて,T の空間 $\mathcal{T}$ 上で導出される群 G^* を考え, その下で一様最強力不変検定を作ることを考えている. しかし, 一様最強力不変検定の定義は $\mathcal{X}$ 上に与えられた群 G の下で不変性を考えデータを縮約させてその後に十分統計量を働かせて一様最強力不変検定を求めることである. すると, 果たして同じものであるのであろうかという問題が生じる. この問題に対して, **丘本正** (1964) は「不変性と十分統計量に関するノート（大阪統計談話会報告,8, 227-231)」において, 取り扱ったのであるが, 著者によると除外集合の取り扱いに難点があり論文の形にせずそのままになっている. その後しばらくして，Arnold(1981) ”The theory of linear models and multivariate analysis (John-Wiley)” の中でこの問題を取り扱い，証明を一切付けずに述べている. この結果では除外集合などに関係せず, ここでは Lehmann の本と合わせてその証明を与えた. ここの報告書ではその証明を省略する.
X を標本とする．この X の取り得る値を標本空間 $\mathcal{X}$ とし，その上で群 G を考える．なお，θ が真の下での X の分布を $\mathrm{P}_\theta(X \in A)$ と表すことにする．$g \in G$ とし，すべての A に対して,

$$\mathrm{P}_\theta(gX \in A) = \mathrm{P}_{\overline{g}\theta}(X \in A) \tag{1}$$

のように $\overline{g}\theta$ を定める．すると，g によって，母数空間 $\Theta = \{\theta\}$ 上に変換 $\overline{g}$ が生じることになる．そこで，この $\overline{g}$ の全体を $\overline{G}$ とすると，次の性質を持つ.

補題 1. G が群ならば，$\overline{G}$ も群である．なお，$(g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x))$ と定める.

定義 1. 仮説 $\mathrm{H}\!:\!\theta \in \Theta_0$ を対立仮説 $\mathrm{K}\!:\!\theta \in \Theta - \Theta_0$ に対する検定を行う．このとき，すべての $\overline{g}$ に対して，$\overline{g}\Theta_0 = \Theta_0$ であり，かつ $\overline{g}(\Theta - \Theta_0) = \Theta - \Theta_0$ のとき，群 G は**仮説検定問題を不変にする** という.

定義 2. すべての $g \in G$ とすべての x に対して,

$$\phi(gx) = \phi(x) \tag{2}$$

を満たすとき，検定関数 $\phi(x)$ を**不変検定** といい，特に，検定関数に限らないとき，**不変** という.

定義 3. 関数 $T(x)$ が**最大不変** とは，不変であって,

$$T(x_1) = T(x_2) \text{ ならば，ある } g \in G \text{ が存在して } gx_1 = x_2 \tag{3}$$

となるときをいう.

従って，$T(x)$ が最大不変のときは，各軌道での値は異なる.

補題 2. 関数 $T(x)$ は最大不変とする．$\phi(x)$ が不変検定であるための必要十分条件は $\phi(x)$ が $T(x)$ の関数となることである.

補題 2 から，不変検定を考えるさいには，最大不変 $T(x)$ の分布を考え，ネイマン・ピアソンの補題を用いて，もし一様最強力検定が存在するならば，これは**一様最強力不変検定**となる.

次に，標本 X の分布 $\mathrm{P}_\theta(\cdot)$ に対して，十分統計量 $T(X)$ が存在する場合について考える．ここで，不変性を考える前に，まず，十分統計量によって，X よりより取り扱いやすい形 $T(X)$ にさせることの正当性を考える．

定義 4. 統計量 $T(X)$ が群 G に関して**共用できる** (compatible) とは，$g \in G$ に対して，$T(g(X)) = g^*(T(X))$ となる $\mathcal{T}$ から $\mathcal{T}$ への変換 g^* が存在するときをいう．

ここで，compatible の用語は Arnold(1981) による．統計量が群 G に関して共用できるための十分条件を与える．

補題 3. もし，$T(X_1) = T(X_2)$ のとき，$g \in G$ に対して，$T(gX_1) = T(gX_2)$ ならば，変換 g^* が存在して，$g^*T(X) = T(gX)$ となる．

上の定義 4 で考えた g^* の全体を G^* とすると，次が得られる．

補題 4. G が群ならば，G^* も群となる．

補題 5. g を群 G の元とし，$T = T(X)$ は十分であり，かつ群 G に関して共用できる統計量とする．g による T 上の変換を g^* とすると，すべての集合 A に対して，

$$\mathrm{P}_\theta(g^*(T) \in A) = \mathrm{P}_{\bar{g}\theta}(T \in A) \tag{4}$$

となる．

補題 6. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとし，群 G は仮説 $\mathrm{H}: \theta \in \Theta_0$ に対して対立仮説 $\mathrm{K}: \theta \in \Theta - \Theta_0$ の仮説検定問題を不変にするとする．すると，群 G によって，T 上で導出された群 G^* の下でこの仮説検定問題は不変になる．

補題 7. 統計量 T は十分統計量であり，群 G に関して共用できるとする．検定関数 $\phi^*(T)$ が 群 G^* の下で不変ならば，$\phi(X) = \phi^*(T(X))$ は G の下で不変である．

補題 8. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとする．検定関数 $\phi(x)$ が G の下で不変ならば，$\phi^*(T) = \mathrm{E}[\phi(X)|T]$ は G^* の下で不変である．

補題 9. 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとする．G の下で不変な任意の検定関数を $\phi(x)$ とすると，同じ検定力関数を持つ G^* の下で不変な検定関数 $\phi^*(T)$ が存在する．

定理． 統計量 T は十分であり，かつ群 G に関して共用できるとする．G^* の下で不変なサイズ α の 検定関数 $\phi^*(T)$ が G^* の下で一様最強力不変検定ならば，検定関数 $\phi(X) = \phi^*(T(X))$ のサイズは α となり，G の下で一様最強力不変検定となる．

この定理により，十分統計量で，かつ群 G に関して共用できる統計量が存在するならば，群 G の下で一様最強力不変検定を求めるには，十分統計量により，考える検定のクラスを制限して，その後，G^* の下で一様最強力不変検定を求めれば良いことになる．従って，補題 5 より，$T(X)$ を十分，かつ共用できる統計量の確率分布に対して，ネイマン・ピアソンの補題を用いて，最強力検定を求めることになる．