ダイナミックファクター多変量GARCHモデルによる動的ポートフォリオの最適化

東京理科大学工学部経営工学科 竹内 友樹 , 塩濱 敬之

1 はじめに

Markowitz(1952) が平均分散モデルを開発して以降, このモデルは標準的な資産選択モデルとして現代ポートフォリオ理論のなかに受け入れられてきた. しかし, 多くの金融資産の収益率の分布は非正規性を示すため, 非正規性を考慮した資産選択モデルも数多く提案されている. 本研究はバリュー・アット・リスク (VaR) をリスク指標に用いた平均 −VaR モデルによるポートフォリオの最適化を考える. VaR の計測には多次元 GARCH モデルを用いる. 分析に用いる GARCH モデルは CCC(Constant Conditional Correlation), DCC(Dynamic Conditional Correlation), STCC(Smooth Transition Conditional Correlation) であり, さらに STCC を一般化したモデルを提案する. 収益率の平均構造にはダイナミックファクターモデル (DFM) を用いる. TOPIX 業種別指数データを用いて, 提案するモデルの有用性を検証する.

2 モデル

2.1 ファクターモデル

いま, m 個の資産を選び, データ数を T とする. それらの収益率からなる行列を $\boldsymbol{R}_t$ とすると, DFM では一般に $\boldsymbol{R}_t$ を次のように表す.

$$\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{\Lambda} F_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \ , \ \ t = 1, \cdots, T \tag{2.1}$$

となる. ファクターには AR(p) を仮定し, 次のように表す.

$$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{\Gamma}_1 \boldsymbol{F}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_p \boldsymbol{F}_{t-p} + u_{i,t} \ , \ \ t = 1, \cdots, T$$

ただし, $\varepsilon_{i,t}$ と $u_{i,t}$ は独立な確率変数である. $\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Lambda}'$ は DFM から推定する DFM は主成分分析から共通ファクターを抽出する PC Dynamic Factor Model を用いる. このモデルは次のように表せる.

$$\text{PC Factor Model :} \ \ \boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

ファクターの数や AR モデルの次数の選択には Bai and Ng(2002) による次の基準を用いる.

$$IC(k,p) = log(V(k,p)) + (k+p)\left(\frac{m+T}{mT}\right) log\left(\frac{mT}{m+T}\right)$$

$$V(k,p) = \min_{\Lambda,F} (mT)^{-1} \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} \left(X_{i,t} - \lambda_i' F_t\right)^2$$

である.

2.2 GARCH モデル

まず 1 変量 GARCH モデルについて, 述べていく. 誤差項 $\varepsilon_{i,t}$ は以下のように表される.

$$\varepsilon_{i,t} = h_{i,t} z_{i,t} \tag{2.2}$$

ここで $z_{i,t}$ は平均 0, 分散 1 を持つ独立同分布に従う確率変数であり, 条件付分子 $h_{i,t}^2$ は次の 2 つのモデルによって定式化される.

1. GJR(1,1) モデル: $h_{i,t}^2 = \omega + \left(\alpha_1 + \gamma D_{i,t-1}^-\right)\varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta h_{i,t-1}^2$,
2. APARCH(1,1) モデル: $h_{i,t}^\delta = \omega + \alpha(|\varepsilon_{i,t-1}| - \alpha_2 \varepsilon_{i,t-1})^\delta + \beta_1 h_{i,t-1}^\delta$,

ここで, ω, α_1, α_2, β は未知母数である. GJR モデルでは $\varepsilon_{i,t-1}$ が負であれば 1, それ以外ではゼロであるようなダミー変数 $D_{i,t-1}^-$ を用いて, ボラティリティの非対称性を捉える. また, APARCH モデルにおけるパラメータ $\delta(\delta > 0)$ の役割は, ボラティリティ $h_{i,t}$ のボックス・コックス変換であり, $|\alpha_2| < 1$ はボラティリティ変動の非対称性を捉えるパラメータである. 誤差項 $z_{i,t}$ の分布は正規分布 (以下 n), t 分布 (以下 t), $skewed - t$ 分布 (以下 st) を選択した.

(2.1) 式で推定された $\varepsilon_{i,t}, i = 1, \cdots, m$ を用いて多変量 GARCH モデルを推定するため, m 変量ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{H}_t^{1/2}(\theta)\boldsymbol{z}_t$$

ここで $\boldsymbol{H}_t^{1/2}(\theta)$ は $m \times m$ の正値定符号行列で $\boldsymbol{z}_t$ は $E(\boldsymbol{z}_t) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{var}(\boldsymbol{z}_t) = \boldsymbol{I}_m$ を持つ確率変数ベクトルであるとする. $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ の条件付分散共分散行列は次のようになる.

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | I_{t-1}) = \boldsymbol{H}^{1/2}\mathrm{var}(z|I_{t-1})\left(\boldsymbol{H}^{1/2}\right)' = \boldsymbol{H}_t$$

多変量 GARCH モデルの定式化には次の 4 つのモデルを用いた．
(1)CCC(Constant Conditional Correlation):(Bollerslev(1986))

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{D}_t \boldsymbol{R}_t \boldsymbol{D}_t = \rho_{i,t}\sqrt{h_{i,t}, h_{j,t}} \ , \ \ \boldsymbol{D}_t = \mathrm{diag}\left(h_{1,t}, \cdots, h_{m,t}\right) \tag{2.3}$$

このモデルでは条件付相関行列が期間にわたって一定であると仮定している．
(2)DCC(Dynamic Conditional Correlation):(Engle(2002))

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{D}_t \boldsymbol{R}_t \boldsymbol{D}_t$$

ここで $\boldsymbol{D}_t$ は (2.3) 式で定義しており, 条件付相関行列は次のように定義する．

$$\boldsymbol{R}_t = (\mathrm{diag}\boldsymbol{Q}_t)^{-1/2}\boldsymbol{Q}_t(\mathrm{diag}\boldsymbol{Q}_t)^{-1/2} \ , \ \ \boldsymbol{Q}_t = (\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{H}^z_{t-1} + \boldsymbol{A} \odot (\boldsymbol{z}_{t-1}\boldsymbol{z}'_{t-1}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{H}^z_{t-1}$$

である．ここで $\boldsymbol{z}_t = \varepsilon_{i,t}/h_{i,t}$ であり, $\boldsymbol{H}^z_t$ は $m \times m$ の $\boldsymbol{z}_t$ の分散共分散行列である．$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は $m \times m$ のパラメータの対角行列であり, パラメータは $\alpha_{i,i} > 0$, $\beta_{i,i} > 0$ であり, $\alpha_{i,i} + \beta_{i,i} < 1$ を満たす．
(3)STCC(Smooth Transition Conditional Correlation):(Silvennoinen and Terasvirta(2005))
ここでの条件付相関行列は以下のような形になる．

$$\boldsymbol{P}_t = (1 - G(s_t))\,\boldsymbol{P}_1 + G(s_t)\boldsymbol{P}_2 \ , \ \ G(\cdot) = \left(1 + e^{-\gamma(s_t - c)}\right)^{-1} \ , \ \ \gamma > 0 \tag{2.4}$$

ここで $\boldsymbol{P}_1 \neq \boldsymbol{P}_2$ となる $\boldsymbol{P}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ はそして $G(\cdot) : \mathbb{R} \to (0,1)$ は遷移変数 $s_t \in F^*_{t-1}$ に関する単調な関数である．$G(\cdot)$ を次のようなロジスティック関数として定義する．

$$G(\cdot) = \left(1 + e^{-\gamma(s_t - c)}\right)^{-1} \ , \ \ \gamma > 0 \tag{2.5}$$

ここでパラメータ γ は遷移する速さを決め, c は遷移する位置を決める．ここで, 遷移変数 s_t は DFM の共通ファクターによる変動を用い, 直近 7 日間の絶対値の平均によって求める．
(4)GSTCC(Generalized Smooth Transition Conditional Correlation):

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{D}_t \boldsymbol{P}_t \boldsymbol{D}_t$$

ここでの $\boldsymbol{D}_t$ は (2.3) 式で定義しており, 条件付相関行列は次のように定義する．

$$\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{V}\{(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{G}(s_t))\,\boldsymbol{P}_1\,(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{G}(s_t)) + \boldsymbol{G}(s_t)\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{G}(s_t)\}\boldsymbol{V}$$
$$\boldsymbol{V} = \{(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{G}(s_t))^2 + \boldsymbol{G}(s_t)^2\}^{-1/2}$$

$\boldsymbol{P}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ は STCC と同様なものを用い, ここでパラメータ γ は速さを決め, $\boldsymbol{c}$ は遷移する位置を決める．$\boldsymbol{c}$ は対角成分にパラメータを入れた $m \times m$ の対角行列である．

3　実証分析

3.1　データ

本研究の分析対象とするデータは業種別指数データで 2001 年 1 月 4 日から 2007 年 6 月 29 日までの日次データである．標本期間は 2001 年 1 月 4 日から 2007 年 6 月 29 日までで, 標本数は 1596 日掛ける 33 銘柄である．このうち 2001 年 1 月 4 日から 2005 年 6 月 22 日までの 1096 日のデータを用いてモデルを推定し, 推定されたモデルを用いて 2005 年 6 月 23 日から 2007 年 6 月 29 日までの 500 日分のデータを予測して動的ポートフォリオの最適化を行った．

3.2　推定結果

1 変量 GARCH モデルによる VaR の推定結果から, 5% 分位点を推定した各モデルを用いて $h_{i,t}$ を推定し多変量 GARCH モデルを推定した．図 1 では VaR 最小ポートフォリオ, 収益最大ポートフォリオにおける各モデルの収益の推移について表した．どのモデルでも平均分散法よりパフォーマンスが大幅に改善されていることが読み取れる．また, VaR を最小にした時, GSTCC-APARCH-*st* が最も良い結果が得られた．同様に収益を最大にした時, GSTCC-GJR-*st* で最も良い結果を得ることができた．

参考文献

[1] Bai. J., S. Ng., Determining the number of factors in approximate factor models, *Econometrica*, **70(1)**, 191-223, 2002.

[2] Bollerslev. T., Generalized Aoutoregressive Conditional Heteroskedasticity *Journal of Econometrics*, **5**2, 5-59, 1986.

[3] Engle. R., Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate GARCH models, *Journal of Business & Economic Statistics*, **20**, 339-350, 2002.

[4] Markowitz. H. M., Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 77–91, 1952.

[5] Silvennoinen. A., Terasvirta. T., Multivariate Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Smooth Transitions in Conditional Correlations, *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 577,* 2005.