Parameter estimated standardized U-statistics for some dependent sequences

吉原健一（横浜国立大学）
金川秀也（武蔵工業大学）

December 19, 2007

$\{\xi_i\}$ を定常で分布関数 F を持つとする．Θ を パラメータ空間 R^d 上の開集合とする．h を次のような対称な核関数とする．

$$h(x, y; \theta) \;=\; h(y, x; \theta) \text{ for any } x, y \in \mathsf{R} \text{ and } \theta \in \Theta$$

さらに θ_0 を真の値とする．

$$\int h(x, y; \theta_0) dF(x) dF(y) \;=\; 0. \tag{1}$$

射影関数

$$h_1(x; \theta) \;=\; \int h(x, y; \theta) dF(y) \tag{2}$$

に対して次式が成り立つとする．

$$\int h_1^2(x; \theta_0) dF(x) \;=\; 0, \tag{3}$$

i.e., 核関数 $h(x, y; \theta_0)$ は退化 U-統計量を定義する．　もし条件 (3) に加えて

$$\int h^2(x, y; \theta_0) dF(x) dF(y) \;<\; \infty \tag{4}$$

が成り立つ時、核関数 $h(x, y; \theta_0)$ によって定義される線形作用素

$$T_h f(x) = \int h(x, y; \theta_0) f(y) \, dF(y)$$

は Hilbert-Schmid 型線形作用素で固有値 $\{\lambda_i\}$ 及び固有関数 $\{\varphi_i(t)\}$ を持ち、

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \;<\; \infty, \tag{5}$$

$$\int \varphi_i(x) \varphi_j(x) dF(x) = \delta_{i,j}, \tag{6}$$

$$\lim_{M \to \infty} \int \int \left\{ \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) - h(x, y; \theta_0) \right\}^2 dF(x) dF(y) \;=\; 0. \tag{7}$$

が成り立つ．さらに $\{\xi_i\}$ は定常確率変数列で次の absolutely regular condition を満たす．

$$\beta(k) \;=\; 2\sup_{n\geq 1}\left\{\sup_{A\in\mathcal{M}_{n+k}^{\infty}}(P(A|\mathcal{M}_1^n)-P(A))\right\}\downarrow 0, \quad (n\to\infty)$$

ただし、 $\mathcal{M}_a^b=\sigma(\xi_a,\cdots,\xi_b)$. θ_0 は θ の真の値とする．

$$\vartheta \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 N_i^2+2\sigma^2\rho^T\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i N_i b_i+\rho^T B\rho \tag{8}$$

ただし $(\rho^T,N_1,N_2,\cdots)$ は期待値 0、共分散行列 C を持つ正規確率ベクトルで

$$\sigma^2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}E\ell^2(\xi_1)+2\sum_{i=1}^{\infty}E\ell(\xi_1)E\ell(\xi_{i+1})$$

とする．この時 Gombay and Horvárth (1998) の拡張として次の定理が成り立つ．

Theorem 1. *Conditions A* 、*B* の下で次式が成り立つ．

$$\frac{1}{\sqrt{2\log\log n}}\max_{1\leq k\leq n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}h(\xi_i,\xi_j;\theta_n)\right| \xrightarrow{D} \vartheta^{\frac{1}{2}}.$$

References

[1] Borovkova, S., Burton, R. and Dehling H. (2001). Limit Theorems for functionals of mixing processes with applications to U-statistics and dimension estimation. *Trans. A. M. S.*, **353**, 4261-4318.

[2] Gombay, and Horváth. (1998). Parameter estimated standardized U-statistics. *Asymptotic methods in Probability and Statistics*, Szyskowicz, B. (Editor), Elsevier Science B. V.

[3] Yoshihara, K. (1992). *Weakly dependent stochastic sequences and their applications, Vol I. Summation theory for weakly dependent sequences.* Sanseido, Tokyo.

[4] Yoshihara, K. (2005). *Weakly dependent stochastic sequences and their applications, Vol XV. Recent topics on limit theorems for functionals of processes with contents and index of this series.* Sanseido, Tokyo.

[5] Yoshihara, K. and Kanagawa, S. (2006). Limit theorems for maximum of standardized U-statistics defined by weakly dependent sequences. (Submitted).